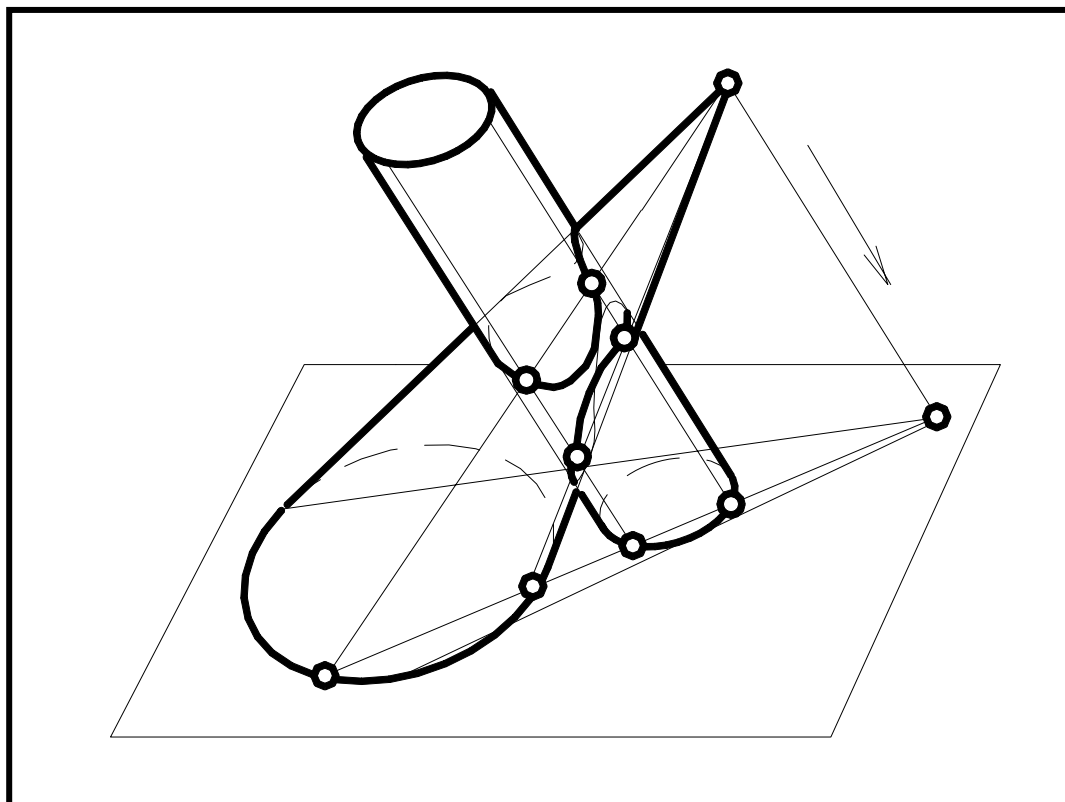


**А.В.Забелин**

---

# ОСНОВЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Под редакцией зав. кафедрой «Инженерная графика» ТГТУ  
д.т.н., профессора В.И.Горячева



## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки пространства обозначают прописными буквами латинского алфавита - A, B, C, D, E,...
2. Вспомогательные точки, необходимые в процессе построения чертежа обозначают цифрами – 1, 2, 3, 4, 5,...
3. Прямые и кривые линии пространства – строчными буквами латинского алфавита – a, b, c, d, e, ...
4. Плоскость проекций (в общем случае) – П.
5. Плоскости – прописными буквами русского алфавита – Б, В, Г, Д, Ж, И, Л...не совпадающими по написанию с латинскими.
6. Плоскости проекций **на наглядных изображениях**:
  - горизонтальная плоскость проекций – Г;
  - фронтальная плоскость проекций – Ф;
  - профильная плоскость проекций – П.
7. Проекции точек, прямых, плоскостей на наглядных изображениях – теми же буквами с добавлением индекса, соответствующего плоскости проекций, например:
  - $A_{\Gamma}$  – проекция точки A на горизонтальную плоскость;
  - $b_{\Phi}$  – проекция линии b на фронтальную плоскость.
8. Линии уровня:
  - горизонталь – h;
  - фронталь – f;
  - профильная – p.
9. Плоскости уровня (при необходимости обозначения **на комплексном чертеже**) теми же буквами, что и плоскости проекций, которым они параллельны:
  - горизонтальная – Г;
  - фронтальная – Ф;
  - профильная – П.
10. Углы – строчными греческими буквами –  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,...
11. Знаки:
  - параллельность - //;
  - перпендикулярность -  $\perp$ ;
  - пересечение – х;
  - прямой угол –  $\square$ ;
  - база отсчета -  $\triangle$ ;
  - совпадение («конкуренция») - =;
  - логическое следствие -  $\Rightarrow$ .

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга написана в соответствии с перечнем тем государственного образовательного стандарта РФ для машиностроительных специальностей высших учебных заведений.

Все рассматриваемые вопросы иллюстрируются большим количеством графических примеров с указанием алгоритмов геометрических построений.

Принятые в книге обозначения на чертежах отличаются от общепринятых, и направлены на сближение начертательной геометрии с инженерной графикой. Как известно, на чертежах (в частности машиностроительных) не применяются обозначения, указывающие на принадлежность изображения тому или иному виду (проекции), поскольку само взаимное расположение видов (проекций) относительно друг друга позволяет судить об этом. Расположение основных видов на чертеже закреплено в ГОСТ 2.317-68.

Более чем двадцатилетний опыт преподавания курса начертательной геометрии на кафедре «Инженерная графика» Тверского государственного технического университета позволяет говорить о праве на жизнь принятых в книге обозначений и определений.

## ВВЕДЕНИЕ

---

### Предмет начертательной геометрии

**Начертательная геометрия** изучает методы изображения пространственных геометрических фигур на плоскости, а также сами эти фигуры по их изображениям.

Среди других ветвей геометрии, *начертательную геометрию* выделяет то, что для решения общегеометрических задач она использует **графический** способ. Чертеж в начертательной геометрии является основным средством изучения свойств геометрических фигур, тогда как в других ветвях геометрии он лишь иллюстрирует свойства фигур, т.е. является вспомогательным средством.

Для того, чтобы чертеж был геометрически равноценен изображаемой фигуре (оригиналу), он должен быть построен по определенным геометрическим законам. В начертательной геометрии чертежи строятся при помощи **метода проецирования**, благодаря чему изображение обладает такими геометрическими свойствами, по которым можно судить о свойствах самого оригинала.

Нет ни одного вида человеческой деятельности, где в большей или меньшей степени не применялись бы чертежи.

**«Чертеж является языком техники»** – говорил один из основателей начертательной геометрии французский геометр Гаспар Монж. **«Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать наши собственные мысли, пользуясь в качестве слов одними только линиями и точками, как элементами всякого изображения»** – дополнил высказывание Монжа профессор В.И.Курдюмов, автор классического русского учебника начертательной геометрии.

Начертательная геометрия развивает у человека пространственное видение, мышление, без чего не может быть никакого инженерного творчества. Она является теоретической базой для выполнения чертежа.

Использование методов начертательной геометрии часто бывает рациональным при конструировании сложных поверхностей технических форм в автомобильной, авиационной и судостроительной промышленности, позволяют решать многие прикладные задачи

механики, химии, кристаллографии, картографии, архитектуры, строительства и других инженерных дисциплин.

### **Хронология развития начертательной геометрии**

Начертательная геометрия, как и всякая другая наука, возникла из практической деятельности человека. Строительство крепостных сооружений, жилья, храмов требовали предварительного изображения этих сооружений. От примитивных изображений, зародившихся в древности и передававших геометрические формы объектов весьма приближенно, по мере развития общества постепенно совершился переход к составлению проекционных чертежей, достаточно полно отражающих геометрические свойства изображаемых на них объектов.

**Альберти Леон Баттиста** (1404-1472) – итальянский философ и архитектор, сформулировал основы теоретической перспективы.

**Леонардо да Винчи** (1452-1519) – итальянский художник и ученый, дополнил линейную перспективу учением *«об уменьшении цветов и отчетливости очертаний»*, что позволило ему получать удивительно рельефные реалистичные изображения.

**Альбрехт Дюрер** (1471-1528) – немецкий математик, художник и гравер, высказывал идеи об ортогональном проецировании пространственных фигур на плоскость, разработал метод ортогонального изображения конических сечений и способ построения перспективы по двум ортогональным проекциям предмета.

**Гвидо Убальди** (1545-1607) – итальянский ученый, считается основателем теоретической перспективы. В его работах содержится решение почти всех основных задач перспективы.

**Рене Декарт** (1596-1650) – французский философ и геометр, создал метод координат, заложил основы аналитической геометрии.

**Жирар Дезарг** (1593-1662) – французский архитектор и математик, применил для построения перспективы метод координат, обосновал теорию аксонометрических проекций.

**А.Фрезье** (1682-1733) – французский инженер, впервые рассмотрел проецирование объекта на две плоскости (фронтальную и горизонтальную).

**И.И.Ползунов** (1728-1766) – русский изобретатель, для создания новой паровой машины выполнил геометрически правильные проекционные изображения, в том числе и ортогональные проекции.

**И.П.Кулибин** (1735-1818) – русский механик и изобретатель, впервые использовал ортогональные проекции в чертежах однопроектного деревянного арочного моста через Неву.

**Гаспар Монж** (1746-1818) – французский геометр и инженер, обобщил все научные труды предшественников, всю теорию о методах изображения пространственных фигур и создал единую науку об ортогональном проецировании – *начертательную геометрию*. В своем труде «Начертательная геометрия», изданном в 1798 году, он определил ее как *«искусство представлять на листе бумаги, имеющем только два измерения, предметы, имеющие три размера, которые подчинены точному определению»*.

**К.И.Потье** (1786-1855) – французский инженер, ученик Монжа. В 1810 году во вновь созданном Институте корпуса инженеров путей сообщения впервые в России начал читать курс начертательной геометрии. Издал в 1816 году первый в России учебник по начертательной геометрии на французском языке.

**Я.А.Севастьянов** (1796-1849) – помощник Потье по институту. Перевел на русский язык учебник К.И.Потье, с 1818 года стал ведущим лектором по начертательной геометрии, первый русский профессор начертательной геометрии. Написал, и в 1821 году издал первый в России оригинальный курс начертательной геометрии на русском языке. Ввел русскую терминологию по начертательной геометрии, которая с некоторыми изменениями употребляется и по настоящее время.

**Н.И.Макаров** (1824-1904) и **В.И.Курдюмов** (1853-1904) – преемники Я.А.Севастьянова. «Курс начертательной геометрии» В.И.Курдюмова насчитывающий более 1100 страниц, является капитальным трудом не устаревшим в некоторых своих частях и сегодня.

**Е.С.Федоров** (1853-1919) – русский кристаллограф. Много своих работ посвятил проективной геометрии, прояснил основные принципы построения многомерной начертательной геометрии.

**Н.А.Рынин** (1887-1942) – ученый в области инженерной графики, авиации и реактивной техники. Ему принадлежит обширная учебная литература по начертательной геометрии. Показал различные области применения начертательной геометрии (механика, аэросъемка, кинематография).

**Д.И.Каргин** (1880-1949) – продолжатель идей Н.А.Рынина в области начертательной геометрии. Его основная работа – «Точность графических расчетов».

**А.К.Власов** (1868-1922) и **Н.А.Глаголев** (1888-1945) – развивали проективное направление в начертательной геометрии, занимались обоснованием аксонометрии.

**М.Я.Громов** (1884-1963) – разработал кинематическую теорию кривых линий и поверхностей, открывшую новые возможности в построении их изображений.

**Н.Ф.Четверухин** (1891-1974) – руководитель московского научного семинара по начертательной геометрии, один из авторов книги «Аксонометрия», изданной в 1953 году.

**И.И.Котов** (1909-1976) – посвятил много своих трудов разработке алгоритмов конструирования каркасных поверхностей и построения их изображений при помощи ЭВМ.

**А.Д.Посвянский** (1909-1991) – ученик Н.Ф.Четверухина, автор «Краткого курса начертательной геометрии» выдержавшего три прижизненных издания. Много усилий приложил для разработки алгоритмов решения задач на пересечение поверхностей.

Начертательная геометрия продолжает развиваться и сегодня в направлении совершенствования методов изображения, теории конструирования поверхностей, многомерной начертательной геометрии, привлечения компьютерной графики для решения практических задач. И здесь нужно отметить деятельность наших современников **Н.Н.Рыжова, С.А.Фролова, В.Е.Михайленко, П.В.Филиппова, В.И.Якунина** и многих других.

## ГЛАВА 1

### КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

---

#### 1.1. СПОСОБЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Геометрической фигурой называют любое множество точек. Геометрических фигур существует много, но основных только три - *точка, прямая (линия) и плоскость*.

В начертательной геометрии все фигуры и предметы отображаются на плоскость двумя основными способами: *центральным проецированием* и *параллельным проецированием*.

##### 1.1.1. Центральное проецирование

Пусть в пространстве дана некоторая плоскость  $\Pi$  которую называют *плоскостью проекций*, и вне этой плоскости точка  $S$ , называемая *центром проецирования*. Чтобы спроецировать некоторую точку  $A$  пространства на плоскость  $\Pi$  нужно через центр проецирования  $S$  и точку  $A$  провести прямую (*проецирующий луч*) до пересечения ее с плоскостью  $\Pi$  в точке  $A_{\Pi}$ . Точку  $A_{\Pi}$  называют центральной проекцией точки  $A$  (рисунок 1).

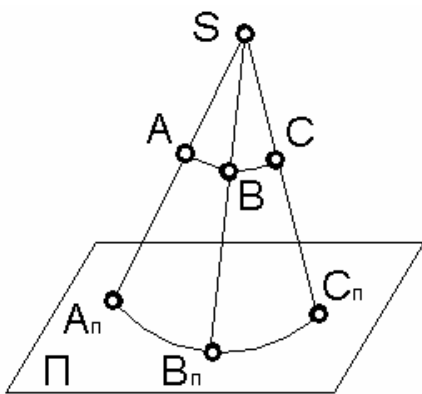


Рисунок 1

Если возьмем произвольную криволинейную фигуру, то все проецирующие лучи образуют проецирующую коническую поверхность, поэтому этот способ проецирования называют еще коническим способом.

Однако для построения проекции фигуры не обязательно проецировать все ее точки. Так проекция отрезка или прямой линии вполне определяется проекциями двух точек; проекция треугольника или плоскости определяется проекциями трех точек; проекция многогранника – проекциями его вершин.

Метод центрального проецирования достаточно сложен и в значительной мере искажает форму и размеры оригинала, так как не сохраняет параллельности прямых и отношения отрезков. Поэтому на практике чаще пользуются методом *параллельного проецирования*.



### 1.1.2. Параллельное проецирование

Широкое распространение в практике получил частный случай центрального проецирования, когда центр проецирования  $S$  удален в бесконечность от плоскости проекций  $\Pi$ . Проецирующие лучи при этом практически параллельны между собой, поэтому данный способ получил название **параллельного проецирования**, а полученные с его помощью изображения (проекции) фигуры на плоскости называют **параллельными проекциями**.

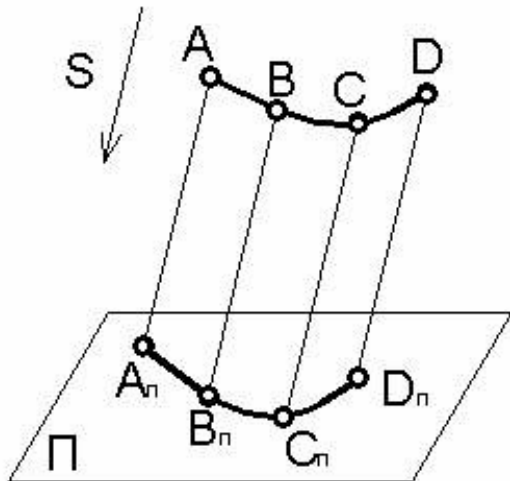


Рисунок 2

Возьмем в пространстве какую-либо фигуру, например линию  $AD$  (рисунок 2). Спроецируем ее на плоскость проекций  $\Pi$ . Направление проецирования укажем стрелкой  $S$ . Чтобы спроецировать точку  $A$  на плоскость  $\Pi$  надо провести через эту точку параллельно направлению  $S$  прямую линию до пересечения с плоскостью проекций  $\Pi$ . Полученная точка  $A_n$  называется **параллельной проекцией точки  $A$** . Аналогично находим проекции других точек линии  $AD$ .

Совокупность всех проецирующих лучей определяет (представляет) в пространстве цилиндрическую поверхность, поэтому такой способ проецирования называют цилиндрическим.

### 1.1.3. Основные свойства параллельного проецирования

- 1) Проекцией точки является точка.  $A \Rightarrow A_n$  (рисунок 3а).
- 2) Проекцией прямой является прямая (*свойство прямолиней-*

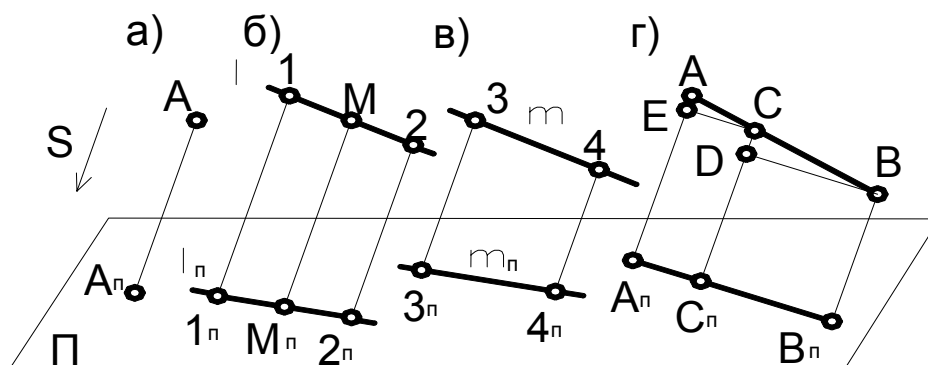


Рисунок 3

ности).

Действительно, при параллельном проецировании все проецирующие лучи будут лежать в одной плоскости  $E$ . Эта плоскость пересекает плоскость проекций по прямой линии  $l_{\pi}$  (рисунок 3б).

Очевидно, если прямая будет перпендикулярна плоскости проекций (*проецирующей прямой*), то ее проекция «выродится» в точку.

3) Если в пространстве точка принадлежит линии (лежит на ней), то проекция этой точки принадлежит проекции линии (*свойство принадлежности*), (рисунок 3б, точка  $M$ ).

4) Проекции взаимно параллельных прямых также взаимно параллельны, т.к. плоскости, образуемые проецирующими лучами параллельны (рисунок 3б, 3в), то  $l \parallel m \Rightarrow l_{\pi} \parallel m_{\pi}$ .

5) Если отрезок прямой делится точкой в некотором отношении, то проекция отрезка делится проекцией этой точки в том же отношении (рисунок 3г).

Докажем это: введем  $CE \parallel A_{\pi}C_{\pi}$  и  $DB \parallel C_{\pi}B_{\pi}$ . Тогда из подобия треугольников  $\triangle ACE$  и  $\triangle CBD$  следует, что

$$|AC|/|CB| = |CE|/|DB| = |A_{\pi}C_{\pi}|/|C_{\pi}B_{\pi}|$$

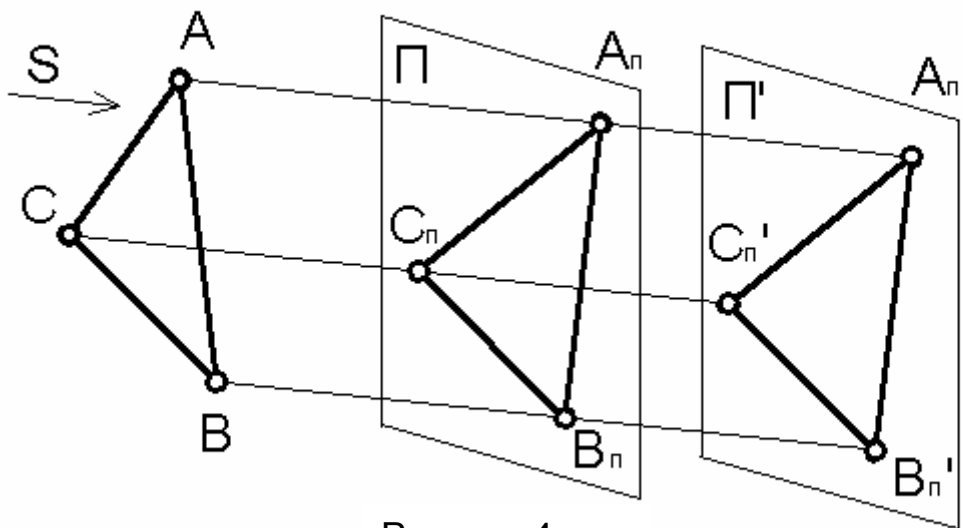


Рисунок 4

6) Параллельный перенос плоскости проекций или фигуры (без поворота) не меняет вида и размеров проекции фигуры (рисунок 4).

#### 1.1.4. Прямоугольное проецирование

Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования  $S$  перпендикулярно плоскости проекций  $P$ , еще больше упрощает построение чертежа и наиболее часто

применяется в конструкторской практике. Этот способ называют **прямоугольным проецированием** или (что тоже) **ортогональным проецированием**.

Метод ортогональных проекций был впервые изложен французским геометром Гаспаром Монжем, поэтому иногда его называют методом Монжа. Этот метод является основным при составлении технических чертежей, поскольку позволяет наиболее полно судить о размерах изображенных предметов. В этом случае нетрудно установить соотношение между длиной некоторого отрезка  $AB$  в пространстве и длиной его проекции  $A_{\Pi}B_{\Pi}$  (рисунок 5).

Если отрезок образует с плоскостью проекций угол  $\alpha$ , то, проведя  $AB^* \parallel A_{\Pi}B_{\Pi}$  получим из прямоугольного треугольника  $ABB^*$ :

$$AB^* = AB \cos \alpha \text{ или } A_{\Pi}B_{\Pi} = AB \cos \alpha.$$

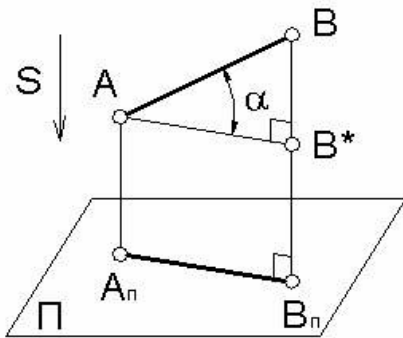


Рисунок 5

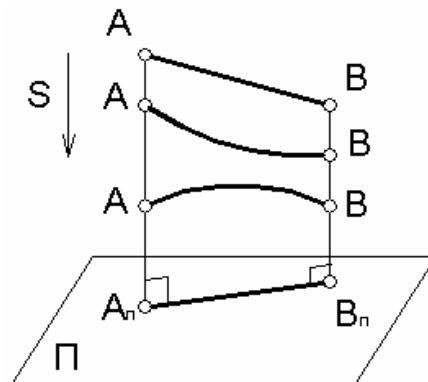


Рисунок 6

Рассмотренные способы проецирования позволяют однозначно решать прямую задачу - по данному оригиналу строить его проекционный чертёж. Однако обратная задача - по данному проекционному чертежу воспроизвести (*реконструировать*) оригинал не решается однозначно. По такому изображению (рисунок 6) нельзя определить не только форму и размеры предмета, но и его положение в пространстве, т.е. одна параллельная проекция не обладает свойством обратимости.

Для получения обратимых чертежей проекционный чертёж дополняют необходимыми данными. Способы дополнения могут быть различными. В данном курсе будем рассматривать только два вида обратимых чертежей:

1. комплексные чертежи в ортогональных проекциях.
2. аксонометрические чертежи.

## 1.2. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ

### 1.2.1. Пространственная двух проекционная модель

Наибольшее применение в технической практике получил чертеж, составленный из двух или более связанных между собой ортогональных проекций изображаемого объекта-оригинала. Такой чертеж называется **комплексным чертежом**.

Принцип образования такого чертежа состоит в том, что объект (оригинал) проецируется на две (или несколько) взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем совмещают с плоскостью чертежа (рисунок 7а).

Одна из плоскостей проекций  $\Gamma$  располагается горизонтально ниже глаз наблюдателя и называется **горизонтальной плоскостью проекций**.

Плоскость  $\Phi$  располагается вертикально перед наблюдателем, ее называют **фронтальной плоскостью проекций**.

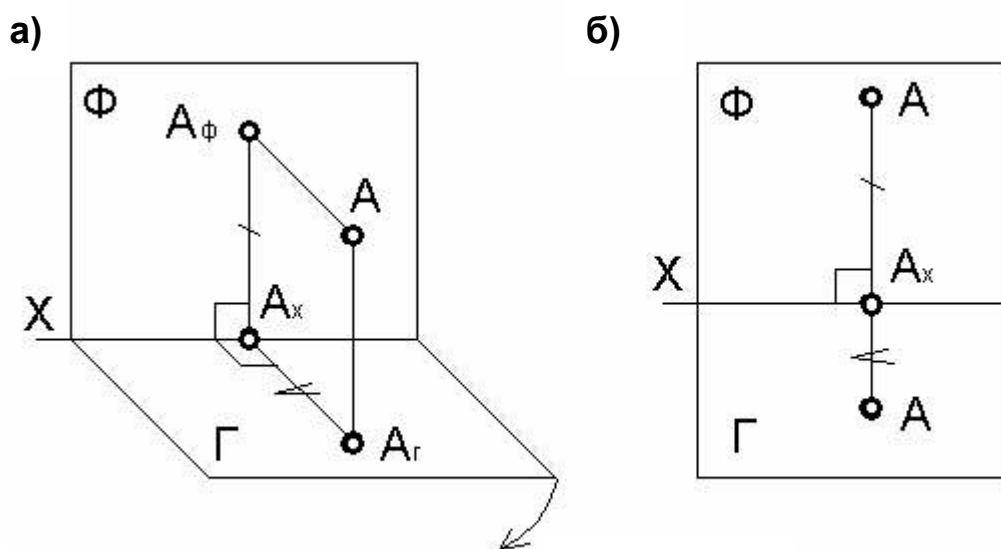


Рисунок 7

Прямую пересечения плоскостей проекций называют **осью проекций**.

Спроецируем ортогонально на плоскости проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$  какую-нибудь точку  $A$ , тогда получим две ее проекции: **горизонтальную проекцию** на плоскости  $\Gamma$  и **фронтальную проекцию** на плоскости  $\Phi$ .

Проецирующие прямые  $AA_\Gamma$  и  $AA_\Phi$ , при помощи которых точка  $A$  проецируется на плоскости проекций, определяют некоторую плоскость  $AA_\Gamma A_\Phi$ , перпендикулярную обеим плоскостям проекций и оси проекций  $x$ . Прямые  $A_\Gamma A_x$  и  $A_\Phi A_x$ , являющиеся проекциями проецирующей плоскости  $AA_\Gamma A_\Phi$  на плоскостях проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$ , будут перпендикулярны к оси проекций  $x$ .

И наоборот, пара точек  $A_\Gamma$  и  $A_\Phi$ , принадлежащих плоскостям  $\Gamma$  и  $\Phi$  и расположенных на перпендикулярах к оси  $x$ , восстановленных из одной и той же точки  $A_x$ , определяет в пространстве единственную точку  $A$ .

Действительно, если провести через точки  $A_\Gamma$  и  $A_\Phi$  перпендикуляры к плоскостям  $\Gamma$  и  $\Phi$ , то они, находясь в одной плоскости  $AA_\Gamma A_\Phi$ , пересекутся в некоторой точке  $A$ .

Расстояние  $AA_\Gamma$  точки  $A$  от горизонтальной плоскости проекций называется **высотой** точки  $A$ , ее расстояние  $AA_\Phi$  от фронтальной плоскости проекций – **глубиной** точки  $A$ .

### 1.2.2. Комплексный чертеж

Чтобы получить плоский чертеж, совместим плоскость проекций  $\Gamma$  с плоскостью  $\Phi$ , вращая плоскость  $\Gamma$  вокруг оси  $x$  в направлении, указанном на рисунке 7а стрелкой. В результате получим **комплексный чертеж** точки  $A$  (рисунок 7б), состоящий из двух проекций точки  $A$ , лежащих на одной прямой, перпендикулярной к оси  $x$ . Прямая, соединяющая две проекции точки  $A$ , называется **линией связи**.

**Здесь и в дальнейшем на комплексном чертеже не будем обозначать проекции оригиналов и сами плоскости проекций символами, обозначающими эти плоскости проекций и принадлежность проекций им. Поскольку в соответствии с ГОСТ 2.305-68 само взаимное расположение проекций (видов) относительно друг друга указывает на их принадлежность плоскостям проекций.**

Полученный комплексный чертеж будет **обратимым** чертежом, т.е. по этому чертежу можно определить (реконструировать) оригинал. Действительно, рассматривая, например, фронтальную проекцию точки  $A$  и имея на чертеже ее глубину, можно реконструировать точку  $A$ . Для этого нужно восстановить перпендикуляр к плоскости чертежа в точке фронтальной проекции и от плоскости чертежа отложить глубину искомой точки  $A$ , тогда конец перпендикуляра определит положение точки  $A$ .

### 1.2.3. Отказ от фиксированных плоскостей проекций

Рассмотренный принцип образования комплексного чертежа получил широкое распространение в учебной литературе со времен Гаспара Монжа.

Однако в технической практике при образовании комплексного чертежа можно отказаться от фиксации плоскостей проекций. Осно-

ванием этому может служить то свойство параллельного проецирования, что *проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций*.

На рисунке 8 показано образование комплексного чертежа точки  $A$  при нефиксированных плоскостях проекций. В этом случае плоскости  $\Gamma$  и  $\Phi$  совмещают с плоскостью чертежа так, чтобы проекции проецирующей плоскости  $AA_{\Gamma}A_{\Phi}$  на них лежали бы на одной прямой (линии связи).

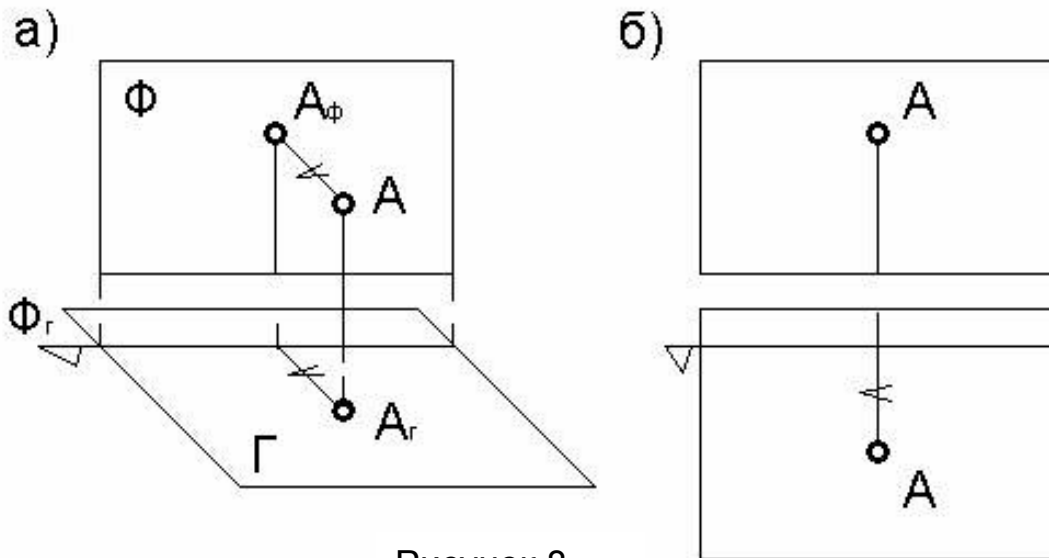


Рисунок 8

Реконструирование оригинала по его комплексному чертежу, образованному при нефиксированных плоскостях проекций, как правило производят по проекции на  $\Phi$  плоскости и измеренным на чертеже глубинам точек оригинала. Измерение координат точек производят обычно от некоторых расположенных определенным образом относительно оригинала плоскостей.

Такие плоскости, относительно которых производят какие-либо измерения, будем называть **базовыми плоскостями**. Базовые плоскости являются проецирующими, т.е. проецируются на плоскости проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$  в прямую линию. Будем называть эти линии **базами отсчета**.

Базы отсчета располагают обычно так: совмещают их с дальней, нижней и правой точками оригинала. Если же оригинал имеет оси симметрии, то базы отсчета совмещают с ними.

Допускается базы отсчета обозначать стилизованными стрелками в виде треугольника, указывающего направление положительного измерения (рисунок 8).

### 1.3. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПРЯМОЙ

#### 1.3.1. Задание прямой

Прямая линия определяется двумя точками, поэтому любая прямая  $l$  может быть задана проекциями  $A_\Gamma$  и  $A_\Phi$ ,  $B_\Gamma$  и  $B_\Phi$  двух ее точек  $A$  и  $B$  на плоскости  $\Gamma$  и  $\Phi$  (рисунок 9). Учитывая, что параллельная проекция обладает свойствами *параллельности* и *принадлежности*, прямую  $l$  на комплексном чертеже можно задать и ее проекциями  $l_\Gamma$  и  $l_\Phi$ , они будут прямыми, проходящими через проекции точек  $A$  и  $B$ .

Верно и обратное – пара проекций  $l_\Gamma$  и  $l_\Phi$  (не параллельных ли-

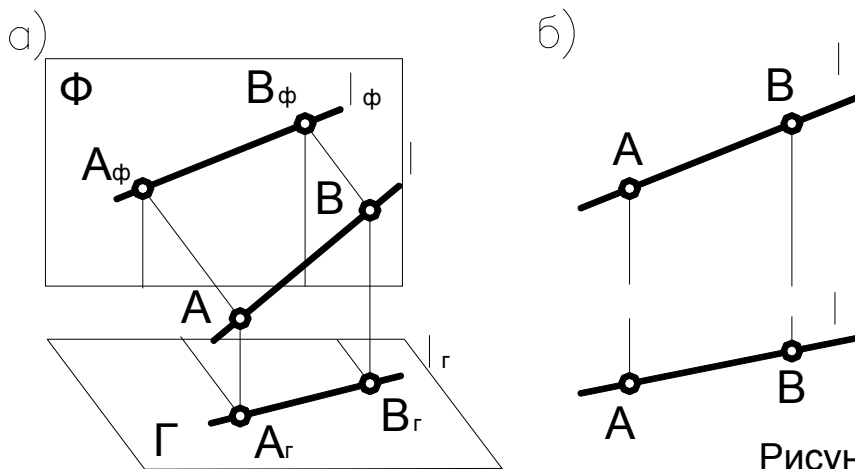


Рисунок 9

ниям связи) определяет в пространстве некоторую прямую. Действительно, эти проекции определяют проецирующие плоскости  $AA_\Gamma BB_\Gamma$  и  $AA_\Phi BB_\Phi$ . В пересечении этих плоскостей и определяется прямая  $l$ .

Обратим внимание, что у прямой  $l$  на рисунке 9 ближняя к наблюдателю точка  $A$  расположена ниже, чем более удаленная от него точка  $B$ . Таким образом прямая  $l$  по мере удаления от наблюдателя поднимается вверх, поэтому прямую  $l$  называют **восходящей**.

Если же прямая по мере удаления от наблюдателя понижается, то такую прямую называют **нисходящей** (рисунок 10).

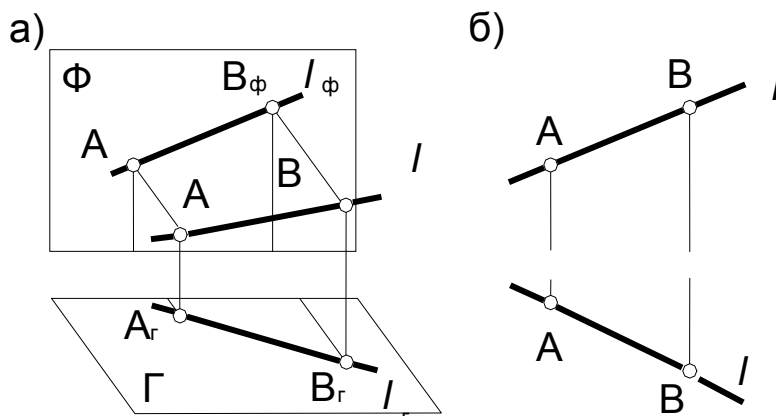


Рисунок 10

Заметим, что на комплексном чертеже проекции *восходящей* прямой наклонены относительно линий связи в одну и ту же сторону (рисунок 9б), а проекции *нисходящей* прямой наклонены в разные стороны (рисунок 10б).

Таким образом, **на комплексном чертеже проекции восходящей прямой ориентированы одинаково, а проекции нисходящей – противоположно.**

### 1.3.2. Профильная прямая

Не всегда две проекции  $l_\Gamma$  и  $l_\Phi$  определяют в пространстве некоторую прямую. Так, если обе эти проекции параллельны линиям связи, но не совпадают с одной и той же линией связи (рисунок 11а), или, если одна проекция параллельна линиям связи, а другая не параллельна им (рисунок 11б). В обоих этих случаях проекции  $l_\Gamma$  и  $l_\Phi$  не могут быть приняты за проекции некоторой прямой  $l$ .

Действительно, здесь нельзя по линиям связи найти для всех точек проекции  $l_\Gamma$  соответствующих точек проекции  $l_\Phi$ .

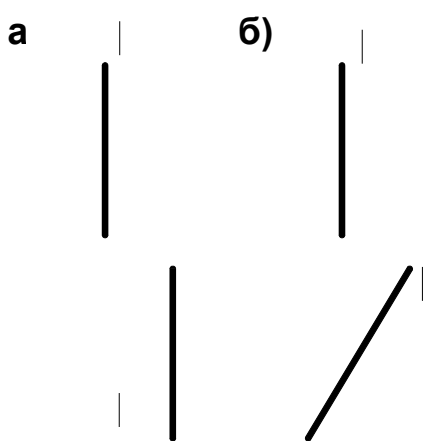


Рисунок 11

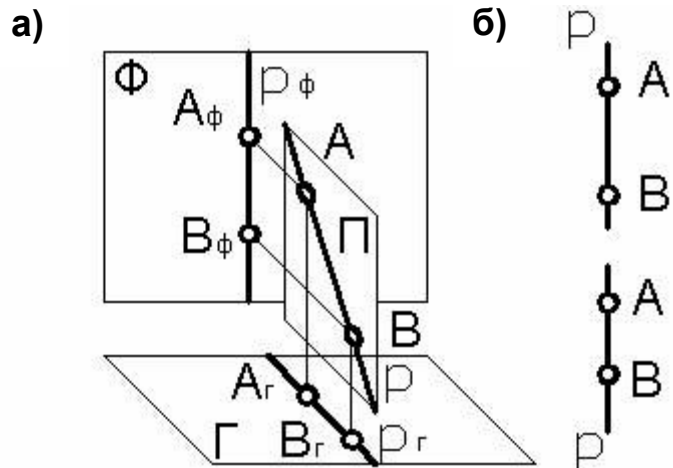


Рисунок 12

Если же обе проекции  $p_\Gamma$  и  $p_\Phi$  (рисунок 12) находятся на одной линии связи, то проецирующие плоскости, определяемые этими проекциями, совпадают в одну плоскость  $\Pi$ . Поэтому такой паре проекций соответствует в пространстве множество прямых, лежащих в плоскости  $\Pi$ .

Плоскость  $\Pi$ , перпендикулярная к обоим плоскостям проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$ , называется **профильной плоскостью**, а прямые этой плоскости – **профильными прямыми**.

Следовательно все профильные прямые, расположенные в одной и той же профильной плоскости  $\Pi$ , изображаются на комплексном чертеже одной и той же парой проекций  $p_\Gamma$  и  $p_\Phi$  расположенных на одной линии связи. Поэтому эта пара проекций не определяет



единственную прямую.

Итак: **всякая непрофильная прямая  $l$  однозначно определяется двумя своими проекциями  $l_2$  и  $l_\phi$ , для определения же профильной прямой необходимо задать на проекциях  $p_2$  и  $p_\phi$  прямой  $p$  проекции двух ее точек  $A$  и  $B$ .**

Часто при решении различных вопросов с профильными элементами, в том числе с профильными прямыми и плоскостями, используют построение третьей проекции на профильную плоскость проекций  $\Pi$ , перпендикулярную к плоскостям  $\Gamma$  и  $\Phi$ .

#### 1.4. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ПЛОСКОСТИ

Плоскость определяется тремя точками не лежащими на одной прямой. Поэтому на комплексном чертеже всякая плоскость  $B$  может быть задана проекциями трех ее точек  $A, B$  и  $C$  (рисунок 13).

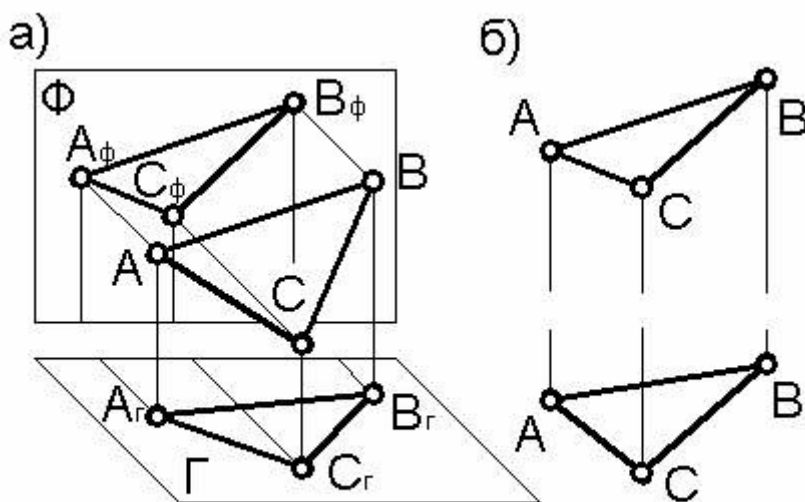


Рисунок 13

Если для большей наглядности соединим эти точки прямыми – получим задание плоскости треугольником  $ABC$ . При этом не следует забывать, что треугольник  $ABC$  – это «способ» задания плоскости, а сама плоскость бесконечна. Значит, при решении различных

задач, построения могут выходить за пределы треугольника.

Учитывая бесконечность плоскости, она не может быть задана на комплексном чертеже своими проекциями, так как они будут занимать полностью все плоскости проекций. Как и профильные прямые, плоскости на комплексном чертеже приходится задавать с помощью проекций точек их определяющих.

Если плоскость по мере удаления от наблюдателя поднимается вверх, то такую плоскость называют **восходящей**. На чертеже (рисунок 13б) обе проекции треугольника  $ABC$ , которым задана восходящая плоскость, имеют одинаковую ориентацию (или одинаковые «обходы» – по движению часовой стрелки).

**Нисходящая** плоскость по мере удаления от наблюдателя понижается. На рисунке 14 проекции треугольника  $DEF$ , которым задана нисходящая плоскость, имеют разную ориентацию (разные об-

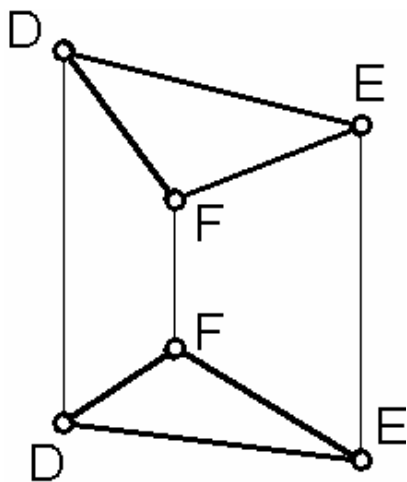


Рисунок 14

ходы: фронтальная проекция – по ходу часовой стрелки, горизонтальная – против часовой стрелки).

Таким образом, **на комплексном чертеже проекции восходящей плоскости ориентированы одинаково, а нисходящей – противоположно.**

Задание плоскости на чертеже треугольником или (что тоже) тремя точками не единственно возможное. Чтобы сделать чертеж более удобным и наглядным, плоскость общего положения ограничивают, задавая ее одним из следующих способов:

- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) двумя параллельными прямыми;
- 3) двумя пересекающимися прямыми;
- 4) точкой и прямой;
- 5) отрезком плоскости (например, треугольником).

При этом всегда можно перейти от одного способа задания плоскости к другому.

## 1.5. КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ИЗ ТРЕХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

### 1.5.1. Третья (профильная) плоскость проекций

Как показано выше, комплексный чертеж из двух ортогональных проекций является обратимым чертежом, т.е. по этому чертежу можно реконструировать оригинал. Однако, если у оригинала имеются профильные элементы (профильные прямые или плоскости), становится проще, если помимо двух основных проекций имеется еще одна проекция на третью плоскость. В качестве такой плоскости проекций применяется плоскость, перпендикулярная к обеим основным плоскостям  $\Gamma$  и  $\Phi$ , называемая **профильной плоскостью проекций  $\Pi$** . Три плоскости проекций  $\Gamma$ ,  $\Phi$  и  $\Pi$  образуют систему трех взаимно перпендикулярных плоскостей (рисунок 15а).

### 1.5.2. Трех видовой комплексный чертеж

Рассмотрим образование чертежа некоторой точки  $A$  при нефиксированных плоскостях проекций.

Спроецировав на плоскости  $\Gamma$ ,  $\Phi$  и  $\Pi$  данную точку  $A$ , получим в дополнение к ее проекциям  $A_\Gamma$  и  $A_\Phi$  **профильную проекцию  $A_\Pi$**  (рису-

нок 15а). Расстояния точки А от базовых горизонтальной и фронтальной плоскостей ранее были названы нами соответственно **высотой** и **глубиной** точки А. Расстояние точки А от базовой профильной плоскости проекций называется **широтой** точки А.

Если теперь совместить все три плоскости проекций Г, Ф и П с плоскостью чертежа так, чтобы проекции проецирующей плоскости  $A_{\Gamma}AA_{\Phi}$  на плоскостях Г и Ф оказались на одной вертикальной прямой (*вертикальная линия связи*), а проекции проецирующей плоскости  $A_{\Phi}AA_{\Pi}$  на плоскостях Ф и П на одной горизонтальной прямой (*горизонтальная линия связи*), то получим комплексный чертеж точки А в трех ортогональных проекциях (рисунок 15б).

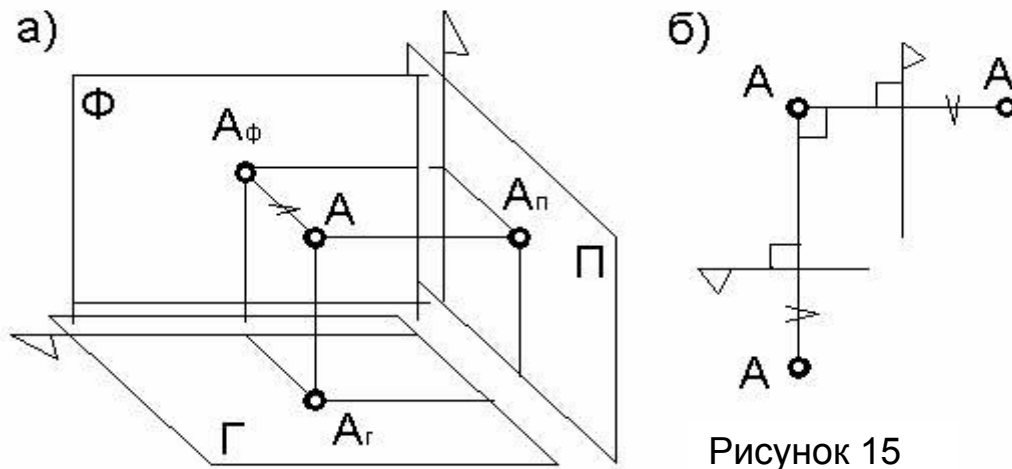


Рисунок 15

Если зафиксировать плоскость Ф и принять ее за базовую плоскость, то глубина точки А может быть измерена как на фронтальной так и на профильной проекциях от базы отсчета глубин (обозначена треугольником).

Итак: **для построения профильной проекции точки А по заданным фронтальной и горизонтальной проекциям, нужно провести через фронтальную проекцию точки горизонтальную линию связи, на которой отложить от базы отсчета глубин глубину точки А, предварительно измеренную на горизонтальной проекции от той же базы отсчета глубин.**

## 1.6. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

### 1.6.1. Термины и определения

Прямые и плоскости могут располагаться в пространстве различно. Если они наклонены ко всем основным плоскостям проекций, то называются прямыми и плоскостями **общего положения**. Прямые и плоскости, перпендикулярные или параллельные плоскостям

проекций, называются прямыми и плоскостями **частного положения**.

Прямые и плоскости частного положения разделяются на **проецирующие** прямые и плоскости, которые перпендикулярны плоскостям проекций, и на прямые и плоскости **уровня**, параллельные плоскостям проекций.

Очевидно, что каждая проецирующая прямая вместе с тем является и прямой уровня, а каждая плоскость уровня – проецирующей плоскостью.

### 1.6.2. Проецирующие прямые

**Прямая  $i$ , перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\Gamma$ , называется горизонтально проецирующей прямой.** На горизонтальную плоскость проекций она и все точки лежащие на ней проецируются в одну точку  $i_\Gamma$  (рисунок 16а).

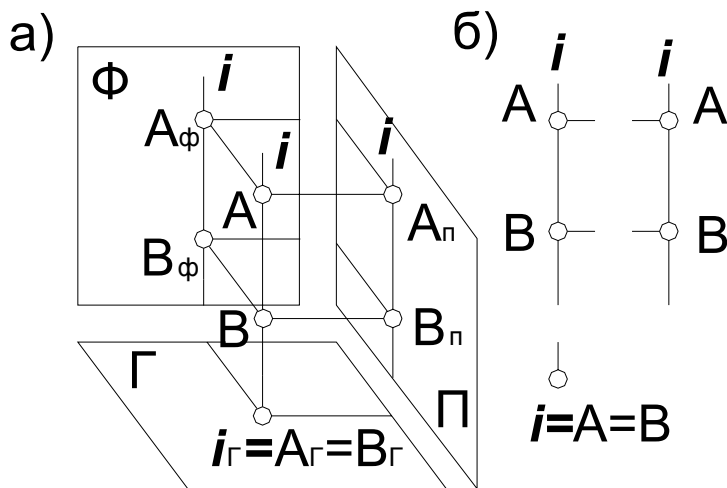


Рисунок 16

и профильная проекции этой прямой параллельны вертикальным линиям связи. Поскольку прямая  $i$  параллельна фронтальной  $\Phi$  и профильной  $\Pi$  плоскостям проекций, то ее отрезок проецируется на эти плоскости без искажения, то есть  $AB = A_\Phi B_\Phi = A_\Pi B_\Pi$ .

Так как все точки горизонтально проецирующей прямой  $i$ , в том числе и точки  $A$  и  $B$ , имеют одну и ту же горизонтальную проекцию  $i = A = B$ , то такие точки будем называть **горизонтально конкурирующими** (т.е. совпадающими на горизонтальной проекции).

Аналогично, **прямая  $i$ , перпендикулярная фронтальной плоскости проекций** (а также все точки принадлежащие ей, в том числе  $C$  и  $D$ ) проецируется на фронтальную плоскость проекций  $\Phi$  в одну точку:  $i = C = D$  (рисунок 17). Такая прямая **называется фронтально проецирующей прямой**. Фронтальной проекцией этой прямой является точка, горизонтальной – прямая  $i$ , параллельная вертикальным линиям связи, а профильной проекцией – прямая, параллельная горизонтальным линиям связи.

Так как прямая  $i$  параллельна плоскостям проекций  $\Gamma$  и  $\Pi$ , то

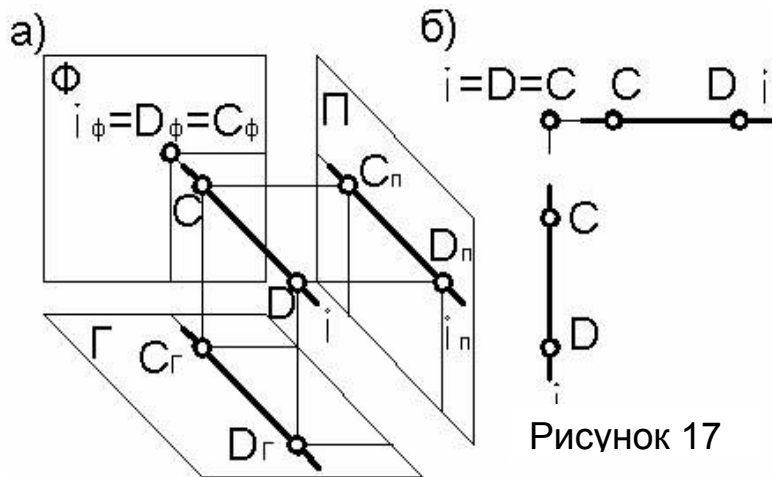


Рисунок 17

любой ее отрезок проецируется на эти плоскости без искажения:  $CD = C_ГD_Г = C_ФD_Ф$ .

Точки фронтально проецирующей прямой (в том числе C и D) называют *фронтально конкурирующими* (совпадающими на фронтальной проекции).

**Профильно проецирующая прямая –**

**это прямая, перпендикулярная профильной плоскости П.**

Все ее точки (в том числе и точки E и F) проецируются на профильную плоскость проекций П в одну точку:  $i_П = E_П = F_П$  (рисунок 18).

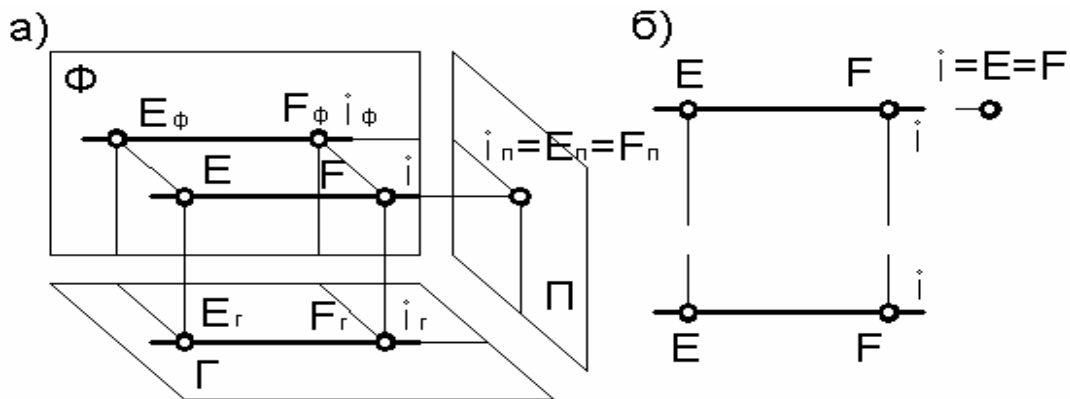


Рисунок 18

Профильной проекцией этой прямой является точка, а горизонтальная и фронтальная проекции параллельны горизонтальным линиям связи.

Поскольку прямая  $i$  параллельна плоскостям проекций Г и Ф, то ее отрезки проецируются на эти плоскости без искажения:  $EF = E_ГF_Г = E_ФF_Ф$ .

Точки профильно проецирующей прямой (в частности E и F) называются *профильно конкурирующими* (совпадающими на профильной проекции).

### 1.6.3. Проецирующие плоскости

**Плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекций Г, называется горизонтально проецирующей.**

Эта плоскость проецируется на горизонтальную плоскость проекций в одну прямую линию, являющуюся горизонтальной проекци-

ей плоскости. Фронтальная и профильная проекции плоскости занимают полностью  $\Phi$  и  $\Pi$  плоскости проекций (рисунок 19).

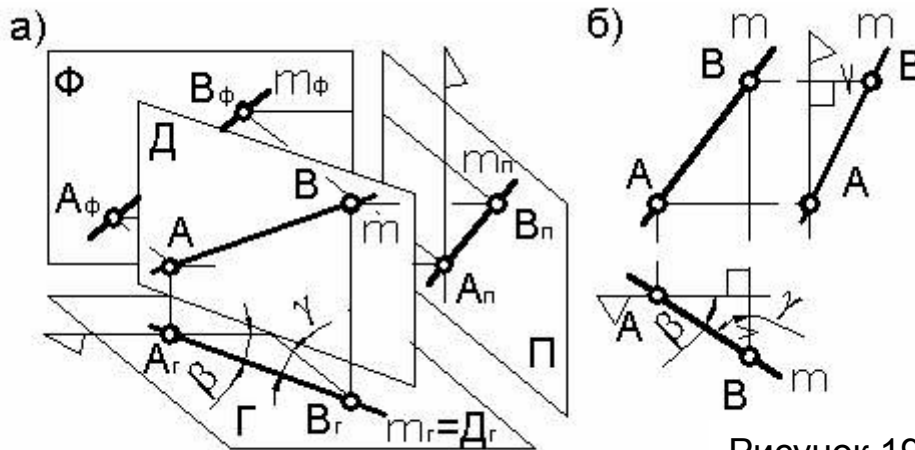


Рисунок 19

Горизонтальная проекция точки или фигуры, лежащих в горизонтально проецирующей плоскости  $D$ , находятся на этой прямой (проекции плоскости). Так, например, проекция прямой  $m$ , лежащей в этой плоскости совпадает с проекцией самой плоскости:  $m_\Gamma = D_\Gamma$ . Поэтому можно сказать, что проекция горизонтально проецирующей плоскости «собирает на себе» проекции точек, линий и фигур, расположенных в этой плоскости.

Горизонтально проецирующая плоскость вполне определяется одной своей проекцией. При этом углы  $\beta$  и  $\gamma$ , образуемые проекцией плоскости ми линиями связи, есть углы наклона горизонтально проецирующей плоскости соответственно к фронтальной и профильной плоскостям проекций.

Точку и прямую, а также две прямые, расположенные в одной и той же горизонтально проецирующей плоскости, называют *горизонтально конкурирующими точкой и прямой* или *горизонтально конкурирующими прямыми*, так как их горизонтальные проекции в общем случае либо принадлежат друг другу, либо совпадают.

Исключением являются случаи, когда прямая или обе прямые – горизонтально проецирующие. В этих случаях горизонтальные проекции данных оригиналов не принадлежат друг другу и не совпадают. Поэтому эти оригиналы не являются конкурирующими.

**Плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций  $\Phi$ , называется фронтально проецирующей плоскостью.**

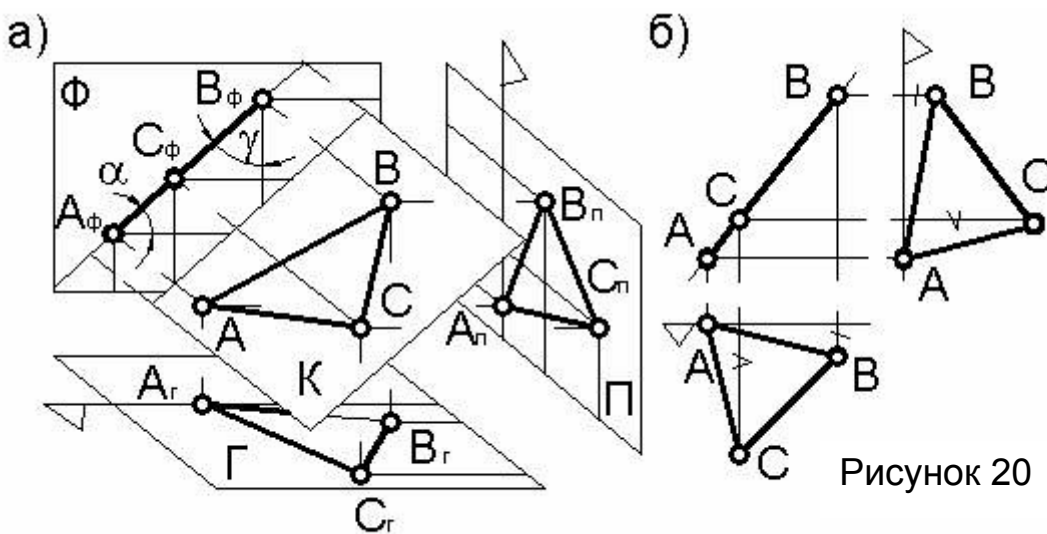
Ее фронтальная проекция является прямой, а горизонтальная и профильная проекции занимают соответственно полностью горизонтальную  $\Gamma$  и профильную  $\Pi$  плоскости проекций (рисунок 20).

Фронтальная проекция всякой точки, прямой или фигуры, лежащих во фронтально проецирующей плоскости лежит на проекции

самой плоскости (являющейся прямой линией).

Так треугольник  $ABC$ , лежащий в этой плоскости, «вырождается» в прямую линию  $A_{\phi}B_{\phi}C_{\phi}$  (рисунок 20а) совпадающую с проекцией плоскости  $K$ . Аналогично горизонтально проецирующей плоскости, фронтально проецирующая плоскость «собирает на себе» (на той проекции, где она «вырождается» в прямую) проекции точек, линий и фигур расположенных в ней.

Фронтально проецирующая плоскость вполне определяется одной фронтальной проекцией. Углы  $\alpha$  и  $\gamma$ , которые проекция плоскости образует с горизонтальными и вертикальными линиями связи, определяют углы наклона плоскости соответственно к горизонтальной и профильной плоскостям проекций.



Точку и прямую, а также две прямые, лежащие в одной фронтально проецирующей плоскости, называют *фронтально конкурирующими точкой и прямой* или *фронтально конкурирующими прямыми*.

**Плоскость, перпендикулярная к профильной плоскости проекций  $\Pi$ , называется профильно проецирующей плоскостью.** Профильная проекция этой плоскости является прямой, а горизонтальная и фронтальная проекции занимают полностью горизонтальную и фронтальную плоскости проекций (рисунок 21).

Профильная проекция любого оригинала (точки, линии, фигуры), лежащего в профильно проецирующей плоскости, будет располагаться на прямой, в которую «вырождается» данная плоскость. Например, профильно проецирующие прямые  $i_1$  и  $i_2$ , лежащие в плоскости, проецируются в точки, принадлежащие проекции плоскости  $M$ .

Профильно проецирующая плоскость вполне определяется одной своей профильной проекцией. Углы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые образует

проекция плоскости соответственно с горизонтальными линиями связи и с прямой, перпендикулярной к ним, определяют углы наклона плоскости к горизонтальной  $\Gamma$  и фронтальной  $\Phi$  плоскостям проекций.

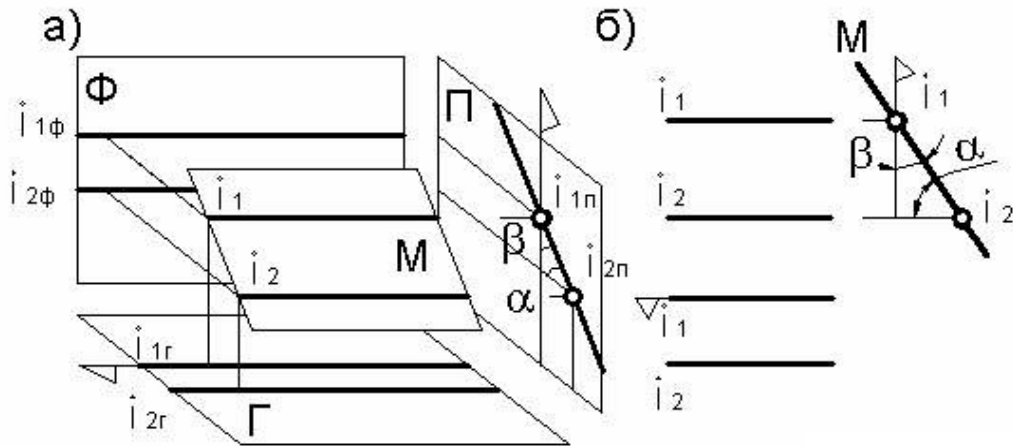


Рисунок 21

Точку и прямую, или две прямые, лежащие в одной и той же профильно проецирующей плоскости, называют *профильно конкурирующими точкой и прямой* или *профильно конкурирующими прямыми*. Однако профильно проецирующие прямые  $i_1$  и  $i_2$ , расположенные в одной и той же профильно проецирующей плоскости, конкурирующими называть нельзя.

#### 1.6.4. Плоскости уровня

**Плоскость, параллельная какой либо плоскости проекций, называется плоскостью уровня**, поскольку все точки этой плоскости одинаково удалены от соответствующей плоскости проекций.

Плоскость, параллельную горизонтальной плоскости проекций, называют **горизонтальной плоскостью уровня** (рисунок 22).

Плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют **фронтальной плоскостью уровня** (рисунок 23).

Плоскость, параллельную профильной плоскости проекций, называют **профильной плоскостью уровня** (рисунок 24).

Каждая плоскость уровня является одновременно также и проецирующей плоскостью.

Так горизонтальная плоскость  $\Gamma$  (рисунок 22) является также фронтально проецирующей и профильно проецирующей. Фронтальная плоскость  $\Phi$  (рисунок 23) – горизонтально проецирующей и профильно проецирующей, а профильная плоскость  $\Pi$  – фронтально проецирующей и горизонтально проецирующей (рисунок 24).



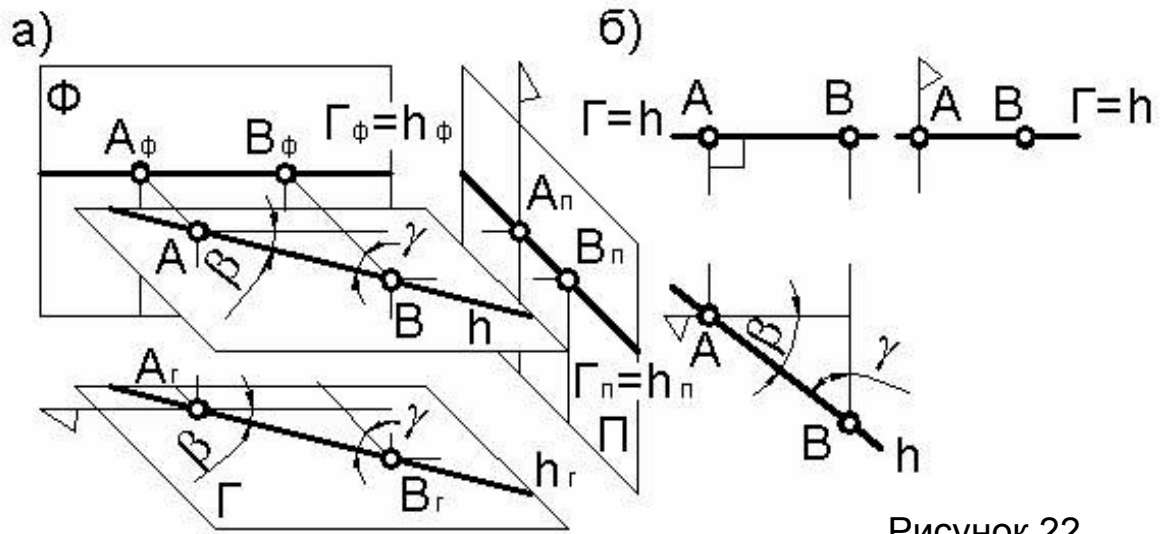


Рисунок 22

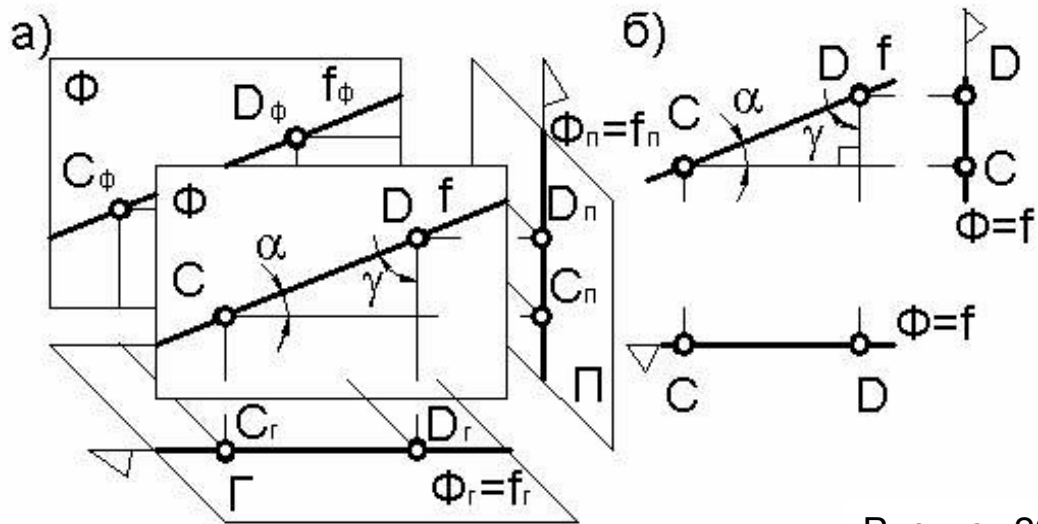


Рисунок 23

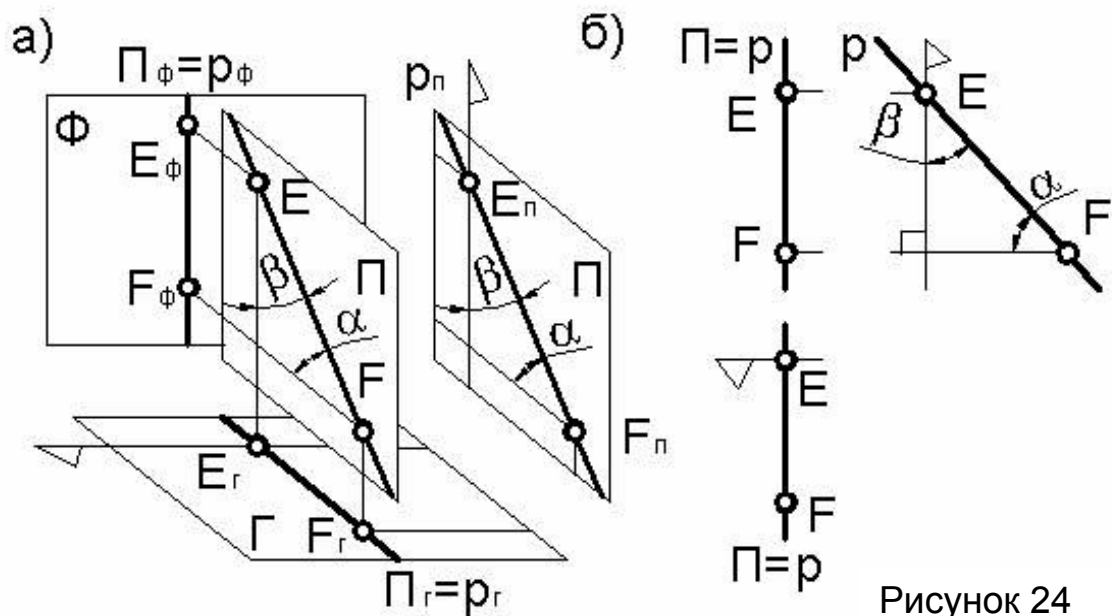


Рисунок 24

Поэтому, как и все проецирующие плоскости, плоскости уровня могут быть заданы одной из своих проекций, являющихся прямой линией перпендикулярной или параллельной соответствующим линиям связи.

Отметим:

***всякая фигура, лежащая в плоскости уровня, проецируется без искажения на плоскость проекций, которой она (плоскость уровня) параллельна.***

#### 1.6.5. Прямые уровня

***Прямая, параллельная какой либо плоскости проекций, называется прямой уровня.***

Прямая  $h$ , параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется ***горизонталью***. Прямая уровня  $f$ , параллельная фронтальной плоскости проекций, называется ***фронталью***. ***Профильная прямая  $p$***  по отношению к профильной плоскости  $\Pi$  также является прямой уровня, поскольку параллельна ей.

Так как ***горизонталь  $h$***  всегда лежит в горизонтальной плоскости  $\Gamma$  (рисунок 22), то ее фронтальная и профильная проекции совпадают с проекциями плоскости  $\Gamma$ . Поэтому ***на комплексном чертеже фронтальная и профильная проекции горизонтали расположены на одной и той же горизонтальной линии связи.***

Поскольку ***фронталь  $f$***  находится во фронтальной плоскости  $\Phi$  (рисунок 23), то ее горизонтальная и профильная проекции совпадают с соответствующими проекциями фронтальной плоскости  $\Phi$ . Поэтому ***на комплексном чертеже горизонтальная и профильная проекции фронтали соответственно перпендикулярны вертикальным и горизонтальным линиям связи.***

У профильной прямой  $p$  (рисунок 24) ***горизонтальная и фронтальная проекции совпадают с одной и той же вертикальной линией связи.***

Проецирующие прямые (как отмечалось в 1.6.2) также являются прямыми уровня. Например, горизонтально проецирующая прямая вместе с тем является одновременно фронталью и профильной прямой; фронтально проецирующая прямая – горизонталью и профильной прямой; профильно проецирующая прямая – горизонталью и фронталью.

***Прямые уровня проецируются без искажения на параллельную им плоскость проекций. При этом в проекциях сохраняются длины отрезков им принадлежащих.*** Так, на горизонтальной плоскости проекций  $\Gamma$  не искажаются горизонтали, на фронтальной плоскости проекций  $\Phi$  – фронтали, на профильной

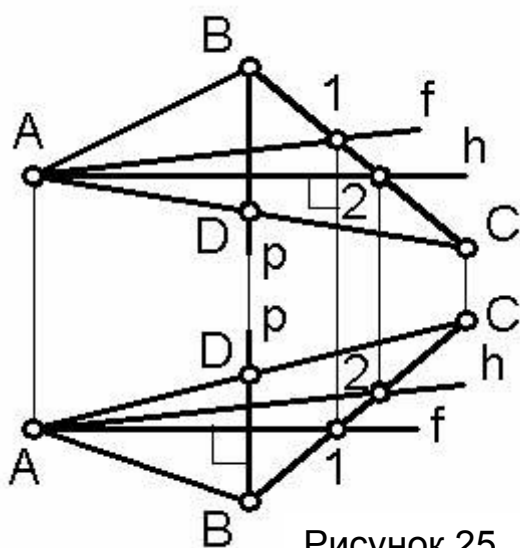
плоскости проекций - профильные прямые.

Вместе с этим на горизонтальной плоскости проекций можно измерить углы  $\beta$  и  $\gamma$  наклона горизонтали  $h$  к фронтальной  $\Phi$  и профильной  $\Pi$  плоскостям проекций (рисунок 22). Углы  $\alpha$  и  $\gamma$  наклона фронтали  $f$  к горизонтальной и профильной плоскостям проекций можно измерить на фронтальной проекции (рисунок 23), а углы  $\alpha$  и  $\beta$  наклона профильной прямой  $p$  к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций – на профильной проекции (рисунок 24).

### 1.6.6. Прямые частного положения в плоскости

В плоскости общего положения можно провести бесчисленное множество горизонталей, фронталей и профильных прямых. При этом все горизонталы будут параллельны между собой, также как будут параллельны между собой все фронталы и все профильные прямые лежащие в этой плоскости.

На рисунке 25 в плоскости общего положения  $B(\triangle ABC)$  прове-



дены все три прямые частного положения  $h$ ,  $f$  и  $p$ . При этом каждая из прямых задана двумя точками, что обеспечивает ее принадлежность плоскости треугольника.

**Построение горизонтали начинаем с ее фронтальной проекции**, поскольку она должна быть перпендикулярна вертикальным линиям связи.

**Фронталь** должна быть перпендикулярна вертикальным линиям связи **на горизонтальной проекции**, поэтому построение

надо начинать с нее. Следует напомнить, что профильная прямая в системе плоскостей проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$  не определяется своими проекциями (см. 1.6.2).

Несомненно, что через каждую точку плоскости можно провести в этой плоскости только одну горизонталь, одну фронталь и одну профильную прямую.

### 1.7. УСЛОВИЯ ВИДИМОСТИ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ

Чтобы сделать чертеж наглядным, удобным для восприятия, прибегают к определению видимости линий на чертеже. При этом проекции невидимых линий в соответствии с ГОСТ 2.303-68 вычер-

чивают штрихами, в два-три раза меньшей толщины, чем толщина сплошных основных линий, которыми изображаются проекции видимых линий.

При ортогональном проецировании направление лучей зрения совпадает с проецирующими прямыми. Если две точки лежат на одном и том же луче зрения, то одна из них закрывается другой. При этом точка, расположенная ближе к наблюдателю будет видимой, а точка, расположенная дальше от наблюдателя – невидимой.

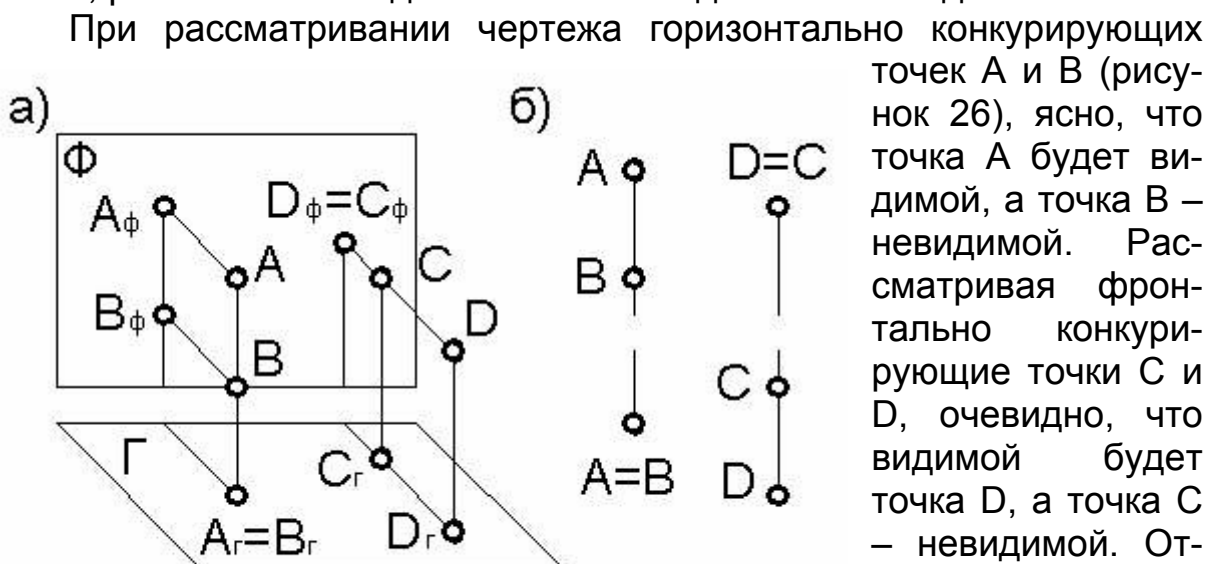


Рисунок 26

*критерий видимости на комплексном чертеже:*

**из двух горизонтально конкурирующих точек на горизонтальной проекции видна та точка, которая расположена выше, а из двух фронтально конкурирующих точек на фронтальной проекции видна та точка, которая расположена ближе к наблюдателю.**

По аналогии с этим:

**из двух профильно конкурирующих точек на профильной проекции видна та точка, которая расположена левее.**

Покажем на примере применение указанного критерия видимости линий чертежа.

Попробуем определить видимость ребер треугольной пирамиды (тетраэдра) на комплексном чертеже (рисунок 27а).

Сначала выясним видимость ребер тетраэдра на горизонтальной проекции. Здесь ребра АВ, ВD, DC и СА являются контурными, значит они видимы на данной проекции. Таким образом речь идет о выяснении видимости только двух ребер – ВС и AD.

Обозначим пару горизонтально конкурирующих точек этих ребер точками 1 и 2. Горизонтальные проекции этих точек совпадают ( $1=2$ ), а фронтальные проекции различны. Однако на фронтальной проекции видно, что точка 1 расположена выше точки 2. Поэтому точка 1, а также и ребро BC, которому принадлежит эта точка, видимы на горизонтальной проекции, а точка 2 и ребро AD – невидимы.

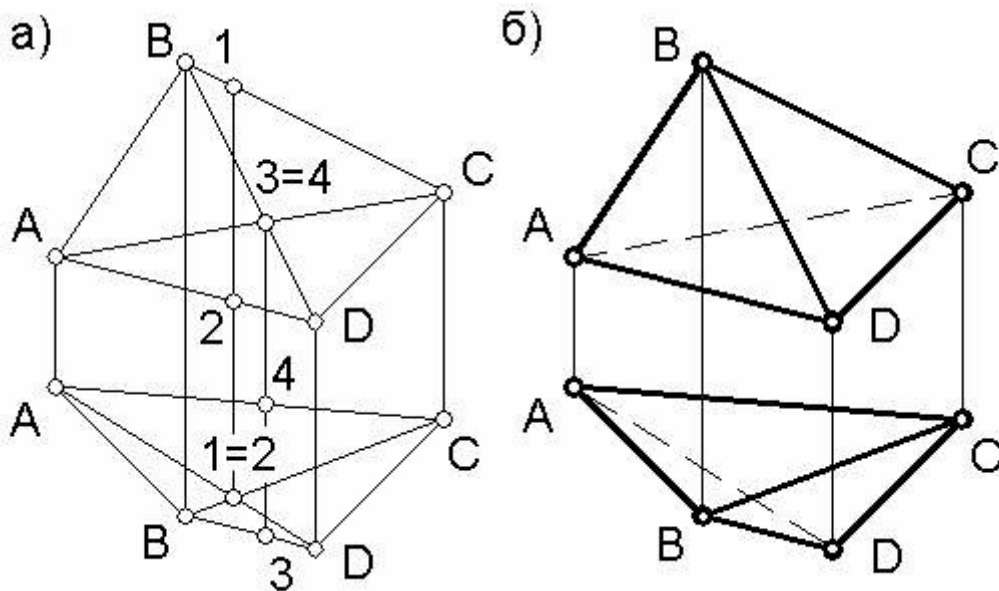


Рисунок 27

Теперь определим видимость на фронтальной проекции. Выделяем ребра AB, BC, CD и DA как контурные, т.е. видимые всегда. Таким образом здесь идет речь об определении видимости только для ребер BD и AC. Выделим на этих ребрах пару фронтально конкурирующих точек 3 и 4. Фронтальные проекции этих точек совпадают, а горизонтальные различны – точка 3 ближе точки 4. Поэтому точка 3, и ребро BD, которому принадлежит эта точка, на фронтальной проекции видимы; точка 4 и ребро AC будут невидимыми.

После определения видимости ребер, чертеж тетраэдра будет выглядеть как показано на рисунке 27б.

## 1.8. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

### 1.8.1. Термины и определения

**Позиционными называют задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических фигур.**

К таким задачам относятся задачи на *взаимопринадлежность* (построение точки на линии или поверхности, проведение линии на поверхности или поверхности через заданные линии и другие) и задачи на *пересечение* (пересечение линии с плоскостью и поверхностью, пересечение плоскости с плоскостью и поверхностью, пересечение поверхностей).

Различают **«прямые»** и **«обратные»** позиционные задачи. В прямых задачах необходимо построить чертежи оригиналов, расположенных определенным образом относительно друг друга. В обратных позиционных задачах по имеющемуся чертежу определяется взаимное расположение точек, прямых и плоскостей относительно друг друга.

### 1.8.2. Взаимное расположение двух точек

Возможно всего два варианта расположения двух точек в пространстве: точки совпадают или не совпадают.

Если две точки совпадают, то совпадают и все их проекции. Когда точки не совпадают в пространстве, то их проекции могут:

- не совпадать на всех проекциях (рисунок 28а);
- не совпадать хотя бы на одной проекции (рисунок 28б, в).

При несовпадении точек в пространстве возникает вопрос: как они расположены относительно друг друга?

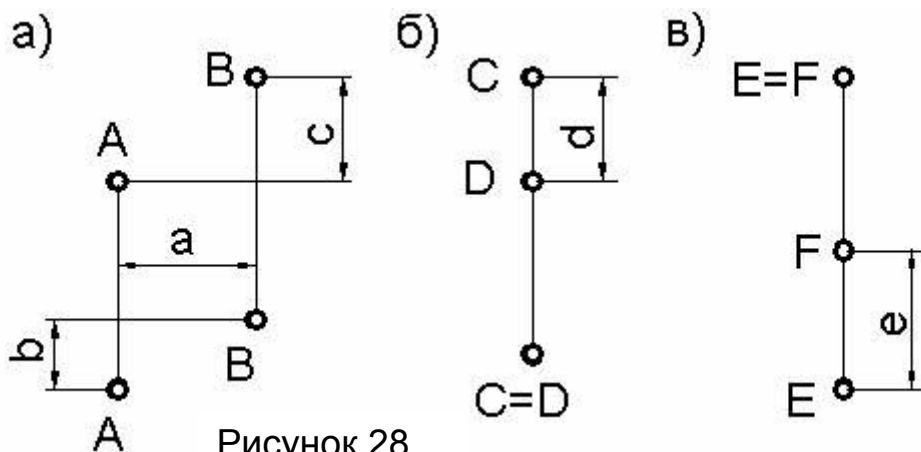


Рисунок 28

Рассматривая чертеж (рисунок 28а), определяем, что точка А расположена левее точки В на величину  $a$ , ближе точки В на величину  $b$  и ниже точки В на величину  $c$ .

На рисунке 28б и 28в изображены, соответственно, горизон-

тально конкурирующие точки  $C=D$  и фронтально конкурирующие точки  $E=F$ .

Как видно, точка  $C$  выше точки  $D$  на величину  $d$ , а точка  $E$  ближе точки  $F$  на величину  $e$ .

### 1.8.3. Взаимное расположение точек и прямой

Точка может либо лежать на прямой, либо быть вне ее. Если точка находится на прямой, то в соответствии со свойством *принадлежности* (см. 3.3) ее проекции должны лежать на одноименных проекциях прямой.

Если же точка находится вне прямой, то хотя бы одна из проекций точки не будет лежать на одноименной проекции прямой (рисунок 29, точки  $B, C, D$ ).

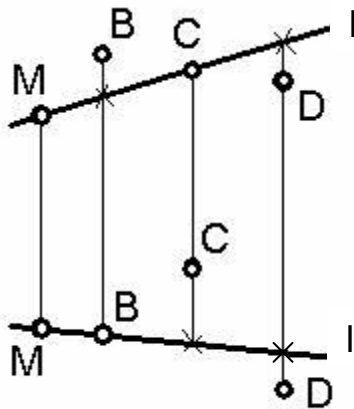


Рисунок 29

На рисунке 29 видно, что точка  $B$  находится над прямой  $I$ , т.к. она расположена выше, чем горизонтально конкурирующая с ней и лежащая на прямой точка помеченная крестиком. Здесь же видно, что точка  $C$  расположена за прямой  $I$ , поскольку она находится дальше, чем лежащая на прямой и фронтально конкурирующая с ней точка отмеченная крестиком. О точке  $D$  можно сказать, что она находится ближе и ниже прямой  $I$ , т.к. она ближе и ниже точки лежащей на прямой (отмечена крестиком).

Для определения положения точки относительно профильной прямой рекомендуется построить профильную проекцию оригиналов.

Таким образом:

**определение взаимного положения точки и прямой сводится к определению взаимного положения двух точек.**

### 1.8.4. Взаимопринадлежность точки и прямой. Деление отрезка в заданном отношении

Из свойства *принадлежности* вытекает следующее правило:

**чтобы построить на данной непрофильной прямой  $I$  некоторую точку  $M$ , достаточно задать ее проекции на одноименных проекциях данной прямой (рисунок 29).**

Так как отношение отрезков некоторой прямой равно отношению проекций отрезков этой прямой (см. 1.1.3), то из этого следует:

**для деления некоторого отрезка  $AB$  точкой  $C$  в заданном**

**отношении, достаточно разделить в этом отношении одну из проекций указанного отрезка, а затем спроецировать делящую точку на другую проекцию.**

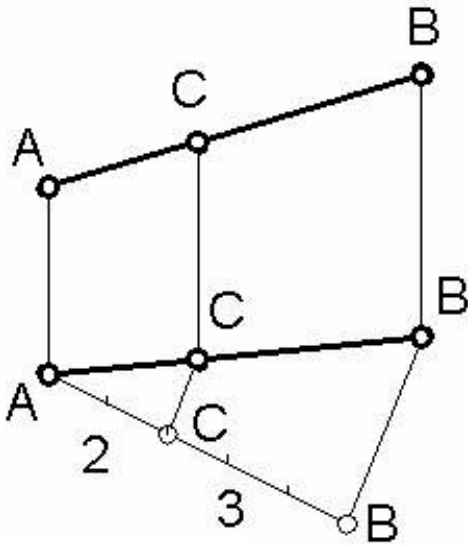


Рисунок 30

На рисунке 30 отрезок АВ разделен точкой С в отношении 2 : 3. Для этого первоначально в этом отношении была разделена горизонтальная проекция указанного отрезка. Делается это следующим образом: из любого конца отрезка (не имеет значения какого) в произвольном направлении проводится луч. На этом луче от того конца отрезка, из которого проведен луч, откладываем 5 (т.к.  $2+3=5$ ) одинаковых произвольной длины отрезков. Конец последнего отрезка соединяем со вторым концом горизонтальной проекции заданного

отрезка АВ. На проведенном луче определяем точку, делящую его в отношении 2 : 3. Через полученную точку параллельно вышеописанной прямой, соединяющей конец последнего отрезка на луче и второй конец горизонтальной проекции отрезка АВ, проводим линию до пересечения ее с проекцией отрезка. В пересечении линии с проекцией отрезка получаем точку С. После этого находим вторую (фронтальную) проекцию точки С.

Для деления в заданном отношении отрезка профильной прямой удобно построить профильную проекцию отрезка и начать построение с нее.

### 1.8.5. Взаимное расположение двух прямых

Две прямые в пространстве могут *пересекаться*, быть *параллельными* или *скрещиваться*.

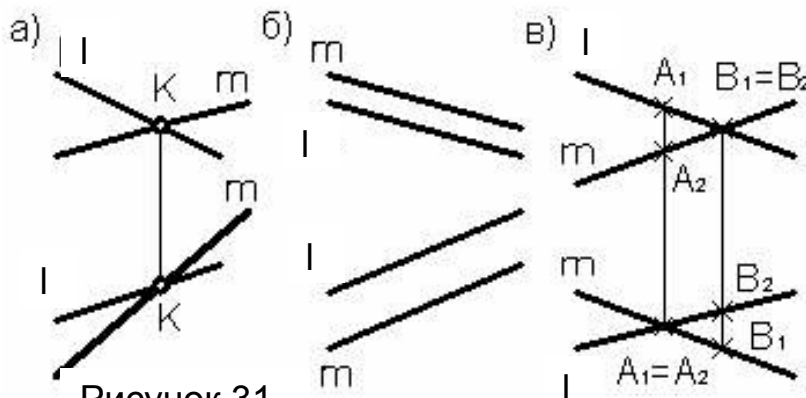


Рисунок 31

Если две прямые пересекаются в некоторой точке К, то на основании свойства *принадлежности* (см. 1.1.3) проекции точки пересечения должны принадлежать проекциям



прямых (рисунок 31а). То есть точки пересечения проекций прямых лежат на одной линии связи.

Если прямые параллельны, то на основании свойства *параллельности* (см. 3.3) одноименные проекции этих прямых также параллельны (рисунок 31б).

Если же прямые скрещиваются, то кажущиеся точки пересечения их проекций таковыми не являются, что видно на рисунке 31в. Здесь мы имеем дело не с одной точкой (пересечения), а с двумя парами конкурирующих точек  $A_1=A_2$  и  $B_1=B_2$ .

Таким образом: **взаимное положение двух непрофильных прямых определяется так –**

- **если проекции прямых параллельны, то прямые параллельны;**
- **если точки пересечения проекций лежат на одной линии связи, то прямые пересекаются; если же эти точки не лежат на одной линии связи, то прямые скрещиваются.**

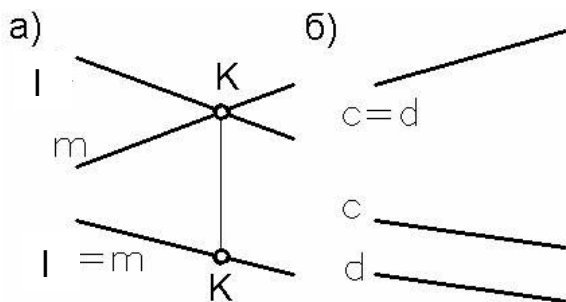


Рисунок 32

В случае, если прямые являются конкурирующими, то они не могут быть скрещивающимися, т.к. лежат в одной (проецирующей) плоскости. Их взаимное положение легко определяется на той проекции, где они не совпадают (рисунок 32). Здесь очевидно, что прямые  $l$  и  $m$  пересекаются в точке  $K$ , а прямые  $c$  и  $d$  параллельны.

Для определения взаимного положения профильных прямых следует построить третью, профильную их проекцию.

Для определения взаимного положения профильных прямых следует построить третью, профильную их проекцию.

### 1.8.6. Взаимное расположение точки и плоскости. Взаимопринадлежность точки и плоскости

Точка может лежать в плоскости или быть вне ее.

**Если точка лежит в плоскости общего положения, то ее проекции должны лежать на проекциях какой-либо прямой, принадлежащей данной плоскости.**

Справедливо и обратное утверждение, если только вспомогательная прямая не является профильной.

Итак, если точка лежит на вспомогательной прямой, принадлежащей плоскости, то она лежит в этой плоскости. Если же точка окажется вне прямой, то ее положение относительно прямой определяет и ее положение относительно самой плоскости.

Рассмотрим «прямую» (построение точки в плоскости) и «об-

ратную» (определение по чертежу положения точки относительно плоскости) задачи.

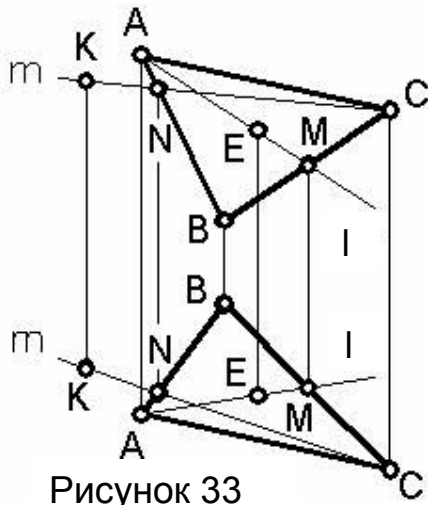


Рисунок 33

Пусть плоскость задана треугольником  $ABC$  (рисунок 33). Покажем как задать какую-либо точку в этой плоскости.

Проще всего взять любую точку на какой-нибудь стороне треугольника, например точка  $M$  на стороне  $BC$ . Для этого достаточно ее проекции задать на проекциях стороны  $BC$ . Точка  $M$ , как лежащая на прямой  $BC$ , принадлежащей плоскости, будет также принадлежать плоскости.

Для более общего задания точки, принадлежащей плоскости треугольника  $ABC$ , необходимо провести в плоскости произвольную прямую  $l$ , выделив для этого в плоскости две любые точки (например  $A$  и  $M$ ). Теперь любая точка прямой  $l$  (например  $E$ ) будет принадлежать плоскости треугольника  $ABC$ .

Таким образом, **построение точки в плоскости производится в два этапа: сначала в плоскости строится вспомогательная прямая, затем на этой прямой строится точка.**

Можно, взяв одну проекцию точки произвольно, «привязать» ее к плоскости с помощью прямой, тогда вторая проекция определится однозначно. Выберем, например, произвольно фронтальную проекцию точки  $K$  (рисунок 33). Затем проведем в плоскости прямую  $m$  так, чтобы на фронтальной проекции она проходила через выбранную проекцию точки  $K$ . Прямая  $m$  определена точками  $C$  и  $N$ , принадлежащими плоскости треугольника. Построив вторую проекцию прямой  $m$ , в пересечении ее с вертикальной линией связи, проведенной из произвольно взятой фронтальной проекции точки  $K$ , найдем вторую (горизонтальную) проекцию точки  $K$ .

**Для определения взаимного расположения точки и плоскости общего положения, следует провести на заданной плоскости вспомогательную прямую, конкурирующую с данной точкой и определить взаимное расположение точки и вспомогательной прямой.**

Если точка будет принадлежать вспомогательной прямой, то она лежит в данной плоскости. Если же она окажется вне вспомогательной прямой, значит точка находится вне плоскости.

На рисунке 34 плоскость задана треугольником  $EDK$ . Определим положение точек  $M$  и  $N$  относительно плоскости.

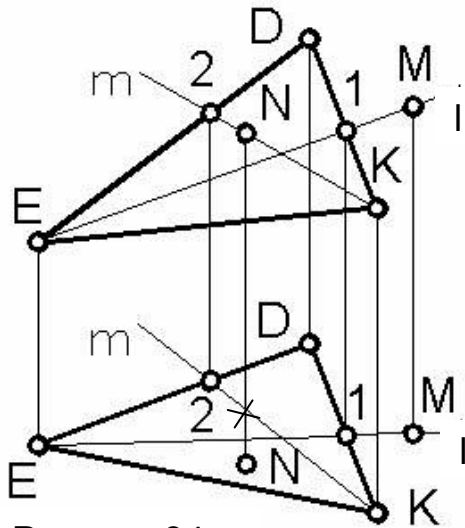


Рисунок 34

Сначала определим положение точки  $M$ . Проведем в плоскости прямую  $l$ , горизонтально конкурирующую с точкой  $M$ . Для этого нужно, чтобы на горизонтальной проекции прямая проходила через точку  $M$ . А для того, чтобы прямая  $l$  принадлежала плоскости, необходимо, чтобы две ее точки принадлежали плоскости (на рисунке 34 это точки  $E$  и  $1$ ). Так как и вторая проекция прямой  $l$  проходит через проекцию точки  $M$ , то точка  $M$  принадлежит прямой  $l$ , а значит и плоскости.

Теперь определим положение точки  $N$  относительно той же плоскости треугольника  $EDK$ . Для этого проведем на плоскости прямую  $m$ , фронтально конкурирующую с точкой  $N$ . Прямую  $m$  определяют на плоскости точки  $K$  и  $2$ . По горизонтальной проекции определяем, что точка  $N$  находится вне прямой  $m$ , а значит и вне плоскости. Действительно, если бы горизонтальная проекция точки  $N$  лежала на прямой  $m$  (в месте, отмеченном крестиком), точка принадлежала бы прямой и плоскости. Но так как ее горизонтальная проекция находится ближе, то точка  $N$  расположена перед фронтально конкурирующей с ней точкой плоскости, а значит и перед самой плоскостью треугольника  $EDK$ .

Учитывая, что плоскость является восходящей (ее проекции ориентированы в одну сторону), нужно уточнить – точка  $N$  находится и над плоскостью.

## 1.9. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение взаимного расположения прямой и плоскости является одной из важнейших задач курса, поскольку она входит как вспомогательная в решение более сложных задач на пересечение многогранников с прямой, с плоскостью, друг с другом или другой поверхностью.

Способ решения таких задач: проведение вспомогательной линии (на плоскости, на поверхности) конкурирующей с данной прямой, а затем определение взаимного положения данной и вспомогательной прямых – является упрощенным толкованием так называемого *способа посредников*. В качестве посредника здесь используется проецирующая плоскость.

При этом действуют следующим образом. Вначале через дан-

ную прямую проводится проецирующая плоскость (посредник) и находится прямая пересечения данной плоскости и проецирующей плоскости-посредника. Затем определяется относительное положение заданной прямой и прямой пересечения плоскостей. Поскольку прямая пересечения плоскостей является прямой принадлежащей заданной плоскости и конкурирующей с заданной прямой, то фактически в этом случае *способ посредников* есть *способ конкурирующих прямых*.

Возможны три варианта расположения прямой и плоскости относительно друг друга: прямая может принадлежать плоскости, пересекаться с ней или быть ей параллельной.

Из геометрии известно:

- прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат плоскости (т.е. она совпадает с некоторой прямой лежащей в плоскости), (рисунок 35а);
- прямая пересекается с плоскостью, если она пересекается с какой-либо прямой этой плоскости, (рисунок 35б);
- прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой лежащей в плоскости, (рисунок 35в).

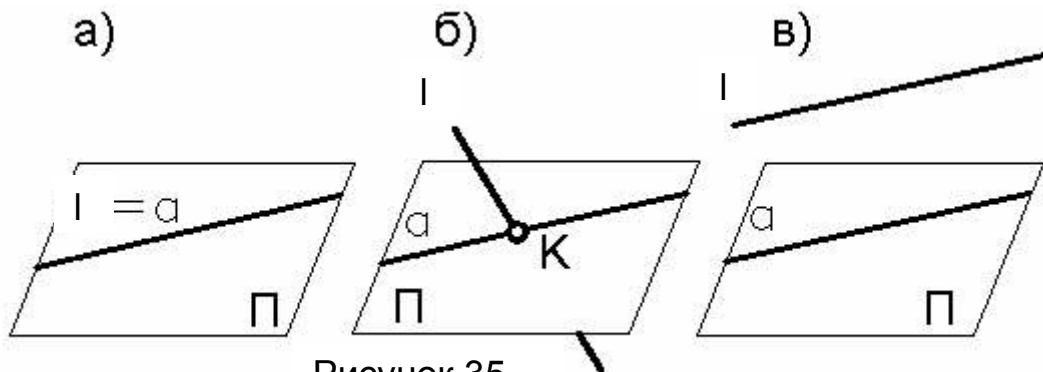


Рисунок 35

Таким образом определение взаимного расположения прямой и плоскости сводится, в общем случае, к определению взаимного расположения двух прямых – данной прямой и вспомогательной прямой, принадлежащей данной плоскости. Обычно в качестве вспомогательной прямой выбирают прямую, конкурирующую с данной прямой.

Следовательно: **чтобы определить взаимное расположение прямой  $l$  и плоскости, нужно на данной плоскости провести вспомогательную прямую  $a$ , конкурирующую с данной прямой  $l$ , и определить взаимное положение конкурирующих прямых  $l$  и  $a$ .**

Если эти прямые пересекаются в некоторой точке, то в этой же точке данная прямая пересекается с плоскостью. Если же конкурирующие прямые совпадают или параллельны, то данная прямая,

соответственно, принадлежит или параллельна данной плоскости.

Рассмотрим все три варианта.

На рисунке 36а изображена прямая  $l$  и плоскость общего положения заданная треугольником  $ABC$ . Определим их взаимное положение.

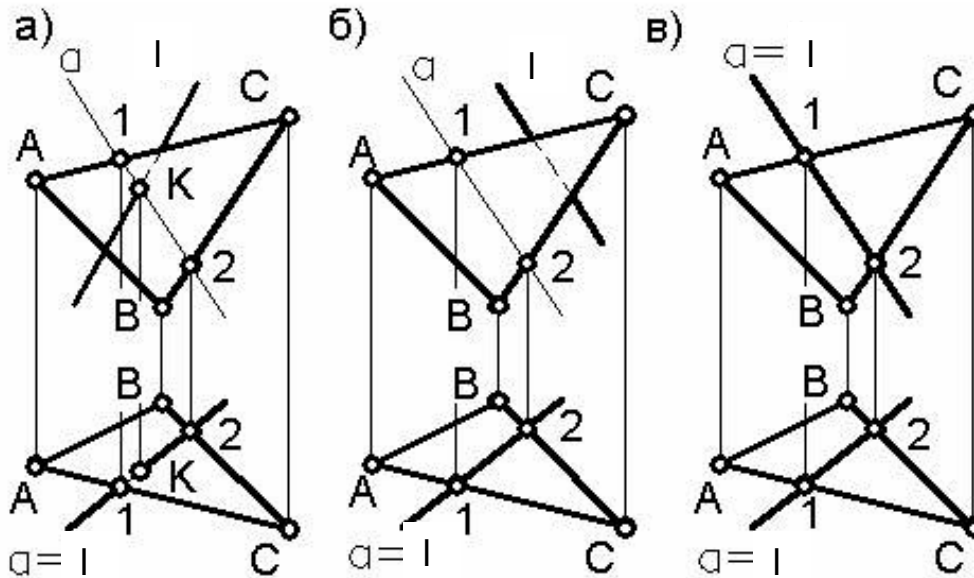


Рисунок 36

Построим на плоскости треугольника вспомогательную прямую  $\alpha$ , горизонтально конкурирующую с прямой  $l$ . Прямую  $\alpha$  в плоскости определяют точки 1 и 2, взятые на сторонах треугольника  $AC$  и  $CB$ . С помощью этих точек прямая  $\alpha$  легко строится на фронтальной проекции (виде спереди), где отмечаем, что прямые  $l$  и  $\alpha$  пересекаются. Следовательно точка  $K$  – точка пересечения прямых и будет точкой пересечения прямой  $l$  с данной плоскостью.

Определим видимость прямой  $l$  относительно плоскости треугольника. На фронтальной проекции видно, что левее точки  $K$  прямая  $l$  расположена **ниже** прямой  $\alpha$ , а значит и плоскости треугольника. Поэтому на горизонтальной проекции (виде сверху) левее точки  $K$  прямая  $l$  будет невидимой, и наоборот, правее точки  $K$  – видимой.

Видимость прямой  $l$  на фронтальной проекции (виде спереди) легко определить исходя из того, что плоскость треугольника является нисходящей. Поскольку нами уже определено, что левее точки  $K$  прямая расположена **ниже** плоскости, то она вместе с тем расположена и **перед** плоскостью. Это означает, что на фронтальной проекции (виде спереди) прямая  $l$  левее точки  $K$  видима, и наоборот, правее точки  $K$  – невидима.

Для увеличения наглядности на рисунке 36 плоскость ограничена треугольником  $ABC$ , поэтому вне проекций треугольника прямая  $l$  изображена видимой.

Если при построении вспомогательной прямой  $\alpha$ , горизонтально конкурирующей с данной прямой  $l$  окажется, что  $l \parallel \alpha$  (рисунок 36б), то это означает, что прямая  $l$  параллельна плоскости треугольника.

Поскольку прямая  $l$  расположена выше прямой  $\alpha$  (это видно на фронтальной проекции), значит она расположена и **выше** плоскости треугольника, поэтому на горизонтальной проекции (виде сверху) она видима полностью. Учитывая, что плоскость – нисходящая, прямая  $l$ , находящаяся выше нее одновременно находится и **за** плоскостью. А это значит, что на фронтальной проекции (виде спереди) прямая невидима.

Если же при построении вспомогательной прямой  $\alpha$  окажется, что прямые совпадают на обеих проекциях (рисунок 36в), то прямая  $l$  принадлежит плоскости.

Отдельно рассмотрим случай определения взаимного расположения профильной прямой и плоскости.

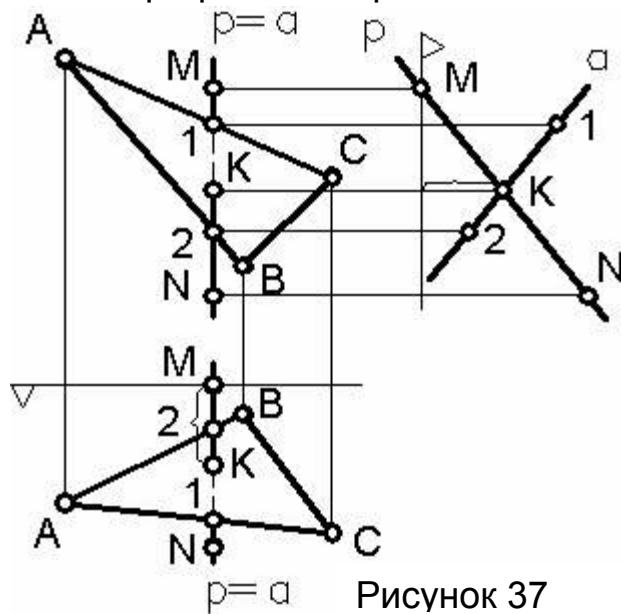


Рисунок 37

Пусть даны: профильная прямая  $p$ , заданная двумя точками M и N, и плоскость общего положения, заданная треугольником ABC (рисунок 37).

Как и в общем случае, построим на плоскости треугольника вспомогательную прямую  $\alpha$ , конкурирующую с заданной прямой  $p$ . Для определения прямой  $\alpha$  на плоскости, выделим на сторонах треугольника AC и AB точки 1 и 2. Ясно, что прямая  $\alpha$  будет как и прямая  $p$  профильной прямой. По заданным горизонтальной и фронтальной проекциям определить взаимное расположение прямых  $p$  и  $\alpha$  не представляется возможным. Построим профильные проекции (вид слева) двух этих прямых. Так как их профильные проекции пересекаются, то прямые  $p$  и  $\alpha$  тоже пересекаются, и точка их пересечения K является точкой пересечения прямой  $p$  с плоскостью треугольника ABC.

Видимость прямой  $p$  относительно плоскости можно определить непосредственно из пространственного представления. Так как прямая  $p$  – восходящая (проекции ориентированы одинаково), а плоскость – нисходящая (проекции различно ориентированы), то прямая  $p$  от точки K в сторону точки M находится **над** и **за** плоскостью треугольника. Поэтому на виде сверху (на горизонтальной проекции) прямая  $p$  видима от точки K в сторону точки M и невидима

от точки K в сторону точки N. На фронтальной проекции (виде спереди) прямая  $p$  видима от точки K в сторону точки M и невидима от точки K в сторону точки N.

в сторону точки N. На виде спереди (на фронтальной проекции) прямая  $p$ , наоборот, видима от точки K в сторону точки N и невидима в сторону точки M.

Если профильные проекции (вид слева) прямых  $p$  и  $a$  окажутся параллельными или совпадут, то прямые будут соответственно параллельны или совпадут, а это означает, что профильная прямая  $p$  соответственно параллельна плоскости треугольника или принадлежит ей.

**При определении взаимного положения прямой и плоскости, когда прямая или плоскость являются проецирующими, следует воспользоваться «вырождением» их проекций в точку или прямую.**

В этом случае решение значительно упрощается. Так, если проецирующая прямая пересекается с какой либо плоскостью, то проекция точки пересечения совпадает с точкой, в которую проецируется сама прямая.

Если же проецирующая плоскость пересекается с какой либо прямой общего положения, то одна из проекций точки пересечения

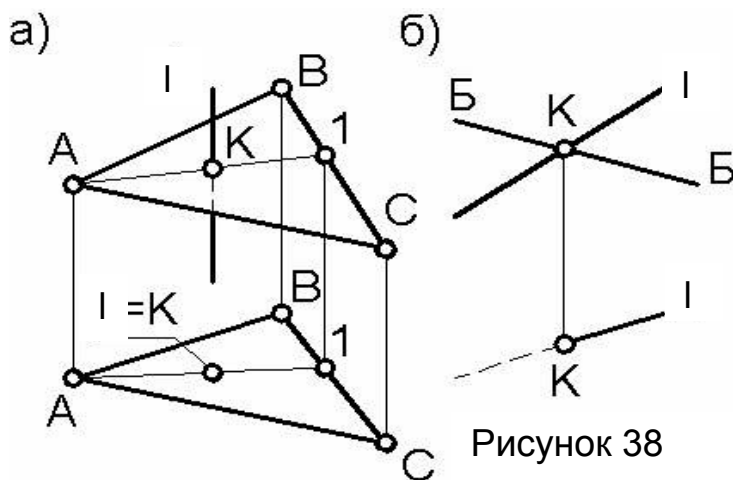


Рисунок 38

определяется в пересечении тех их проекций, где плоскость «вырождена» в прямую).

На рисунке 38а показано построение точки K пересечения горизонтально проецирующей прямой  $i$  с плоскостью общего положения, заданной треугольником ABC. Горизонтальная проекция точки K совпадает с проекцией прямой  $i$ , а фронтальная проекция точки пересечения легко определяется из условия принадлежности точки K плоскости треугольника. Для этого использована вспомогательная прямая A-1, лежащая в плоскости.

На рисунке 38б показано построение точки K пересечения прямой общего положения  $I$  с фронтально проецирующей плоскостью Б. Фронтальная проекция точки K определяется в пересечении фронтальных проекций прямой и плоскости, а горизонтальная проекция точки K найдется в пересечении вертикальной линии связи с горизонтальной проекцией прямой.

## 1.10. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости в пространстве могут совпадать, быть параллельными или пересекаться.

Если плоскости Б и Д совпадают или параллельны, то соответственно этим случаям для любой прямой  $l$  плоскости Б всегда найдется такая прямая  $m$  плоскости Д, которая будет совпадать с прямой  $l$  (рисунок 39а), или будет параллельна ей (рисунок 39б). Если же плоскости пересекаются, то любая прямая  $l$  плоскости Б будет пересекаться с какой-нибудь прямой  $m$  плоскости Д в некоторой точке К, принадлежащей линии пересечения плоскостей (рисунок 39в, прямые  $l_1$  и  $m_1$ ). Может оказаться, что прямые  $l$  и  $m$  будут параллельны, при этом они будут параллельны и линии пересечения плоскостей  $k$  (рисунок 39в, прямые  $l_2$  и  $m_2$ ).

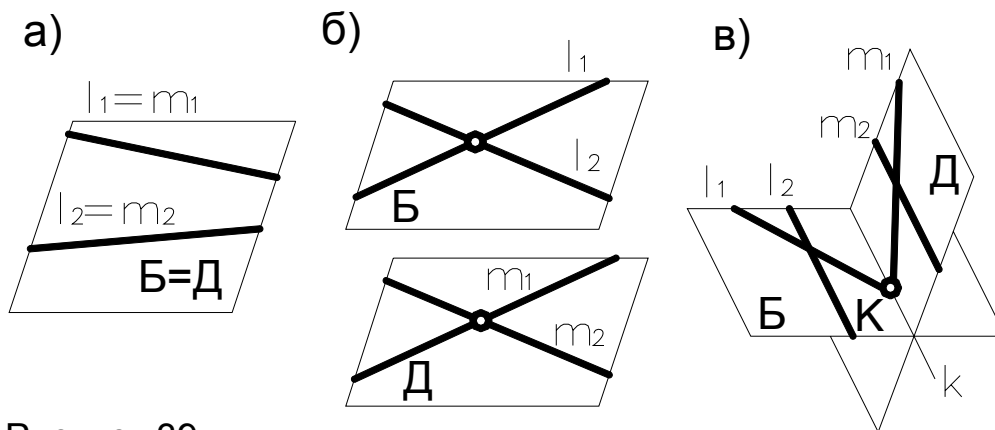


Рисунок 39

Поскольку плоскость определяется двумя прямыми (пересекающимися или параллельными), то для определения взаимного расположения двух плоскостей Б и Д необходимо определить взаимное расположение **двух пар** прямых этих плоскостей. Обычно в качестве таких прямых выбирают конкурирующие прямые.

Нужно отметить, что при определении взаимного расположения двух плоскостей по двум параллельным прямым каждой плоскости не всегда удастся однозначно решить задачу – плоскости могут оказаться или параллельными или пересекаться. Поэтому, если прямые первой пары оказались параллельными, то вторую пару прямых следует проводить не параллельно прямым первой пары.

Условие параллельности плоскостей лучше выразить так:

**если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.**

Это служит основным признаком для определения параллельности плоскостей, а также для построения двух параллельных плоскостей. Рассмотрим применение этого признака на конкретных при-





Вторую пару конкурирующих прямых можно провести двояко: не параллельно первой паре прямых (тогда снова каждую прямую необходимо определять в плоскости двумя точками) или параллельно первой паре прямых, что удобнее, так как помимо известного направления (параллельно прямой первой пары) достаточно определить на каждой прямой лишь по одной точке. В нашем примере это прямые  $h_3=h_4$  и точки 3 и 6 «привязывающие» их к плоскостям Б и Д.

На виде сверху (горизонтальной проекции) отмечаем, что вторая пара горизонталей пересекается в точке М, после чего определяем и фронтальную проекцию этой точки.

После нахождения двух точек линии пересечения плоскостей на обеих проекциях (видах), проводим через полученные (соответствующие видам) точки К и М саму линию пересечения  $k$ .

Если окажется, что прямые обеих пар прямых совпадают, т.е.  $l_1=m_1$  и  $l_2=m_2$  (см. рисунок 39а), то данные плоскости совпадают.

Если же прямые одной из пар конкурирующих прямых параллельны, т.е.  $l_2//m_2$  (см. рисунок 39б, в). то для выяснения взаимного положения плоскостей вторую пару конкурирующих прямых следует провести так, чтобы они не были параллельны прямой первой пары. Тогда, если и прямые этой пары параллельны ( $l_1//m_1$ ), то плоскости Б и Д – параллельны. Если же прямые  $l_1$  и  $m_1$  пересекаются в некоторой точке К, то плоскости пересекаются и прямая их пересечения  $k$  пройдет через точку К параллельно прямой первой пары  $l_2$  и  $m_2$  (см. рисунок 39в).

Отсюда: **чтобы найти линию пересечения двух плоскостей общего положения, надо на этих плоскостях провести две пары конкурирующих прямых и найти их точки пересечения, которые и определяют положение линии пересечения.**

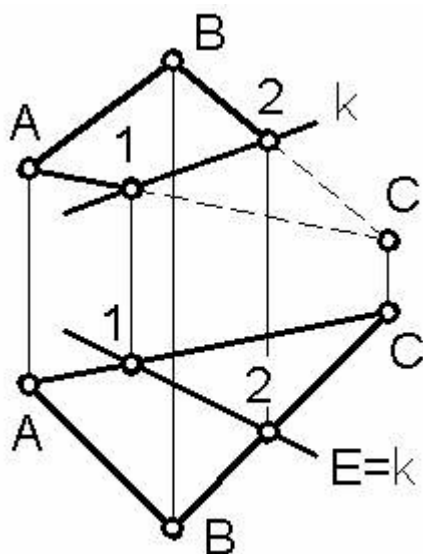


Рисунок 42

Если при определении взаимного положения двух плоскостей одна или обе плоскости являются проецирующими, следует воспользоваться «вырождением» их проекций в прямую.

**Пример 3.** На рисунке 42 показано построение прямой  $k$  пересечения плоскости общего положения Б ( $\triangle ABC$ ) с горизонтально проецирующей плоскостью Е.

На виде сверху (на горизонтальной проекции) прямая  $k$  совпадает с изображением плоскости Е. Фронтальная проекция (вид спереди) прямой  $k$  определена при помощи точек 1 и 2.

*Способ конкурирующих прямых*, с помощью которого определялось взаимное расположение плоскостей, является (как и в случае определения взаимного расположения прямой и плоскости) упрощенным толкованием *способа посредников*. Здесь мы вначале проводим две проецирующие плоскости, затем находим прямые пересечения этих плоскостей с данными плоскостями, после чего определяем относительные положения прямых пересечения заданных плоскостей с каждой из проецирующих.

## ГЛАВА 2

### ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ И ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА МНОГОГРАННИКИ

#### 2.1. ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

На комплексном чертеже многогранники изображаются проекциями своих вершин и ребер. На начальном этапе изучения дисциплины рекомендуется проекции вершин отмечать точками в виде кружков. Для облегчения чтения чертежа иногда полезно обозначать проекции вершин многогранника.

Если у многогранника некоторые ребра являются проецирующими или профильными прямыми, то при не обозначенных вершинах одному и тому же изображению многогранника может соответствовать несколько вариантов его конструкции.

Действительно, если задан чертеж куба, на котором нет обозначения вершин (рисунок 43а), то при реконструкции чертежа помимо куба (рисунок 43б) можно получить еще четыре различно расположенные в пространстве треугольные призмы (одна из них изображена на рисунке 43в). Кроме этого можно получить четверть кругового цилиндра (рисунок 43д), фигуру, дополняющую четверть кругового цилиндра до куба (рисунок 43г) и другие фигуры. Для устранения многозначности в этом случае удобно обозначить проекции вершин куба.

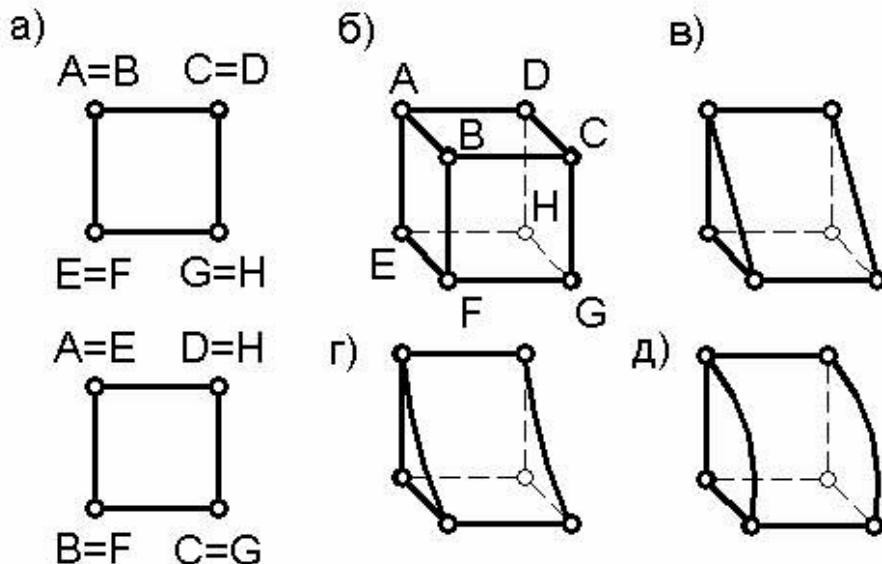


Рисунок 43

Таким образом, в этом случае обратимость чертежа достигается либо обозначением проекций вершин многогранника, либо построением дополнительной проекции (например, профильной).

## 2.2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА С ПЛОСКОСТЬЮ

Сечением многогранника плоскостью является многоугольник, вершинами которого будут точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью, а сторонами – отрезки прямых пересечения граней многогранника с той же плоскостью.

Поэтому построение сечения многогранника плоскостью сводится к многократному решению задачи на пересечение прямой с плоскостью (см. 1.9) или к многократному решению задачи на пересечение плоскостей (см. 1.10). Поскольку решение первой задачи проще, то вершины сечения многогранника обычно строят как точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. После построения вершин сечения нужно соединить отрезками прямых каждые две вершины лежащие в одной грани многогранника. При этом на проекциях (видах) видимыми сторонами сечения будут те, которые лежат в видимых гранях и, наоборот, невидимыми будут стороны сечения, если они лежат в невидимых гранях.

Таким образом:

***построение вершин сечения многогранника плоскостью сводится, в общем случае, к проведению на секущей плоскости вспомогательных прямых, конкурирующих с ребрами многогранника, и определению точек пересечения этих прямых с соответствующими ребрами.***

При этом:

***если секущая плоскость или грани многогранника являются проецирующими, то следует использовать «вырождение» их проекций в прямые.***

Рассмотрим несколько примеров построения сечения многогранника плоскостью. Разберем сначала простейшие случаи, когда секущая плоскость или поверхность многогранника являются проецирующими элементами.

**Пример 1.** Построить проекции сечения пирамиды  $SABCDE$  фронтально проецирующей плоскостью  $B$  (рисунок 44а).

Поскольку в данном случае фронтальная проекция сечения «вырождается» в отрезок прямой, совпадающий с фронтальной проекцией плоскости  $B$ , то здесь можно отметить фронтальные проекции вершин искомого сечения  $A_1, B_1, C_1, D_1$  и  $E_1$ . На виде сверху (на горизонтальной проекции) вершины сечения находим на соответствующих проекциях ребер пирамиды. Соединив последовательно вершины сечения отрезками прямых, получим горизонтальную проекцию сечения.

**Пример 2.** Построить проекции сечения треугольной призмы  $AA_1BB_1CC_1$  плоскостью общего положения  $B(\alpha x b)$  (рисунок 44б).

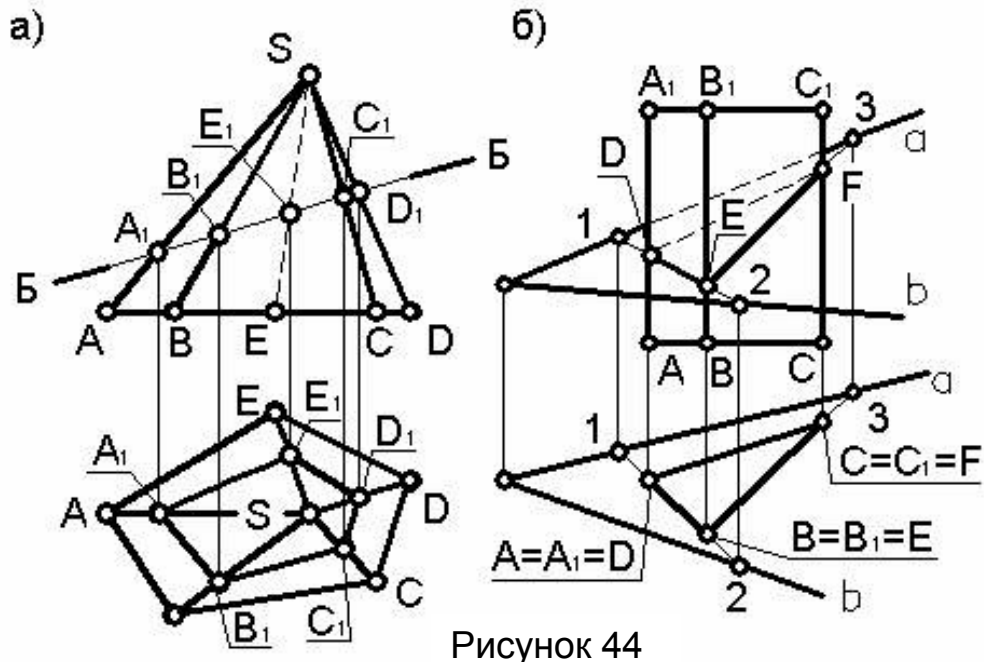


Рисунок 44

Поскольку боковые ребра данной призмы являются горизонтально проецирующими прямыми, то горизонтальные проекции вершин искомого сечения  $D$ ,  $E$  и  $F$  совпадают с горизонтальными проекциями самих ребер призмы. На виде спереди (на фронтальной проекции) вершины сечения легко определяются из условия их принадлежности секущей плоскости  $B$ , для чего в плоскости проведены вспомогательные прямые 1-2 и  $E-3$ .

Рассмотрим более сложные случаи пересечения многогранника плоскостью, когда и многогранник и плоскость являются элементами общего положения.

**Пример 3.** Построить проекции сечения треугольной призмы  $AA_1BB_1CC_1$  плоскостью общего положения  $D(\alpha x b)$  (рисунок 45).

Чтобы найти вершины искомого сечения, строим точки пересечения боковых ребер призмы с данной плоскостью  $D$ . Для этого на плоскости  $D$  проводим вспомогательные прямые 1-2, 3-4 и 5-6, фронтально конкурирующие с ребрами  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Затем определяем точки пересечения вспомогательных пря-

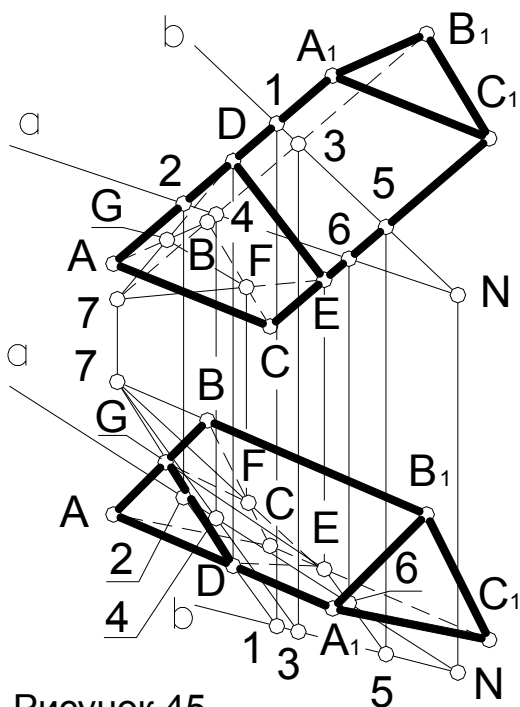


Рисунок 45

мых с соответствующими ребрами призмы. На ребре  $AA_1$  получаем точку  $D$ , на ребре  $CC_1$  – точку  $E$ , на продолжении ребра  $BB_1$  – точку  $7$ . Если бы призма не была ограничена основаниями (была бы бесконечной), то в сечении был бы получен треугольник  $D-7-E$ . Если же учитывать основания призмы, то в сечении получим четырехугольник  $DEFG$ , у которого вершины  $F$  и  $G$  являются точками пересечения сторон  $BC$  и  $AB$  основания  $ABC$  призмы с данной плоскостью  $\Delta$ . Точки  $F$  и  $G$  определяются в пересечении сторон  $BC$  и  $AB$  основания призмы со сторонами сечения  $E-7$  и  $D-7$ .

Поскольку ребра призмы параллельны друг другу, то конкурирующие с ними прямые 1-2, 3-4 и 5-6 будут параллельны между собой. Поэтому, построив первую из них – прямую 1-2, можно каждую последующую вспомогательную прямую строить при помощи одной точки. Так прямую 3-4 можно построить при помощи точки 3, а прямую 5-6 – при помощи точки 5, проведя их параллельно прямой 1-2.

**Пример 4.** Построить проекции сечения четырехугольной пирамиды  $SABCD$  плоскостью общего положения  $\Delta(a//b)$  (рисунок 46).

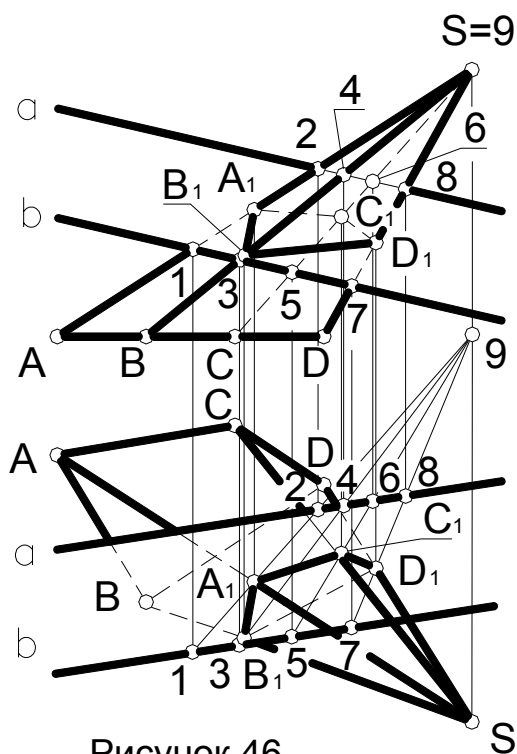


Рисунок 46

На плоскости  $\Delta$  проводим вспомогательные прямые 1-2, 3-4, 5-6 и 7-8 фронтально конкурирующие с ребрами  $SA$ ,  $SB$ ,  $SD$  и  $SC$  пирамиды. На виде сверху (на горизонтальной проекции) в пересечении вспомогательных прямых с соответствующими ребрами пирамиды находим вершины  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  искомого сечения. Остается последовательно соединить вершины сечения отрезками прямых и учесть видимость сторон сечения.

Для увеличения наглядности чертежа секущая плоскость  $\Delta$  принята непрозрачной и ограниченной параллельными прямыми.

Поскольку боковые ребра пирамиды пересекаются в одной точке  $S$ , то конкурирующие с ними вспомогательные прямые 1-2, 3-4, 5-6 и 7-8 также будут пересекаться в одной точке фронтально конкурирующей с точкой  $S$ . Поэтому если первая из вспомогательных прямых – прямая 1-2 определена точками 1 и 2, то остальные можно определять точками 3 и 9, 5 и 9, 7 и 9, не строя точек 4, 6 и 8.

### 2.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА С ПРЯМОЙ

Построение точек пересечения прямой с поверхностью многогранника производится аналогично построению точки пересечения прямой с плоскостью, но конкурирующая с данной прямой линия проводится не на плоскости, а на поверхности многогранника. Поэтому эта линия будет представлять собой ломаную линию, вершины которой лежат на ребрах многогранника, а стороны этой линии будут конкурировать с данной прямой. Точки пересечения данной прямой с вспомогательной ломаной линией и будут точками пересечения прямой с поверхностью многогранника.

Если прямая не пересекается с вспомогательной ломаной линией, то это означает, что данная прямая не пересекается с поверхностью многогранника.

Таким образом:

**для определения взаимного положения прямой и поверхности многогранника нужно провести на его поверхности вспомогательную ломаную линию, конкурирующую с данной прямой и определить взаимное положение этих линий. Если линии пересекаются, то точки их пересечения и являются точками пересечения прямой с поверхностью многогранника.**

Рассмотрим решение подобных задач на комплексном чертеже.

**Пример 1.** Построить точки пересечения прямой  $l$  с поверхностью пирамиды  $SABC$  (рисунок 47).

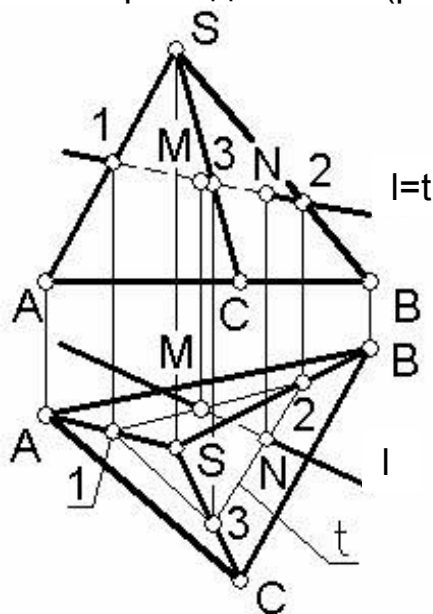


Рисунок 47

Построим на поверхности пирамиды вспомогательную ломаную линию  $t$ , фронтально конкурирующую с прямой  $l$ . Эта вспомогательная линия определяется точками 1, 2 и 3. Видно, что данная прямая пересекается с вспомогательной линией в точках  $M$  и  $N$ , которые и являются искомыми точками пересечения. При этом вначале точки  $M$  и  $N$  строятся на горизонтальной проекции в пересечении прямой  $l$  с вспомогательной линией  $t$ , а затем проецируются на фронтальную проекцию прямой  $l$ .

Определим видимость прямой  $l$ . На виде сверху (на горизонтальной проекции) точки  $M$  и  $N$  лежат в видимых границах пирамиды, поэтому эти точки здесь видимы, а прямая  $l$  будет невидима только на отрезке  $MN$ , находящемся внутри поверхности пирамиды. На виде спереди (на фронтальной проекции) точка  $M$



лежит в невидимой грани SAC, тогда как точка N – в видимой грани SCB. Поэтому прямая  $l$  невидима от точки N до точки M и далее до точки, конкурирующей с точкой 1 ребра AS.

В частных случаях: **при построении точек пересечения прямой с поверхностью многогранника, когда прямая или грани многогранника являются проецирующими, следует использовать «вырождение» их проекций в точку или прямые.**

Рассмотрим это на примерах.

**Пример 2.** Построить точки пересечения фронтально проецирующей прямой  $i$  с поверхностью треугольной пирамиды SABC (рисунок 48а).

На виде спереди (на фронтальной проекции) проекции искомых точек M и N совпадают с проекцией прямой  $i$ . На виде сверху (на горизонтальной проекции) проекции точек M и N легко находятся с помощью вспомогательных прямых S-1 и S-2, принадлежащих граням SAC и SBC пирамиды, которые пересекает прямая  $i$ .

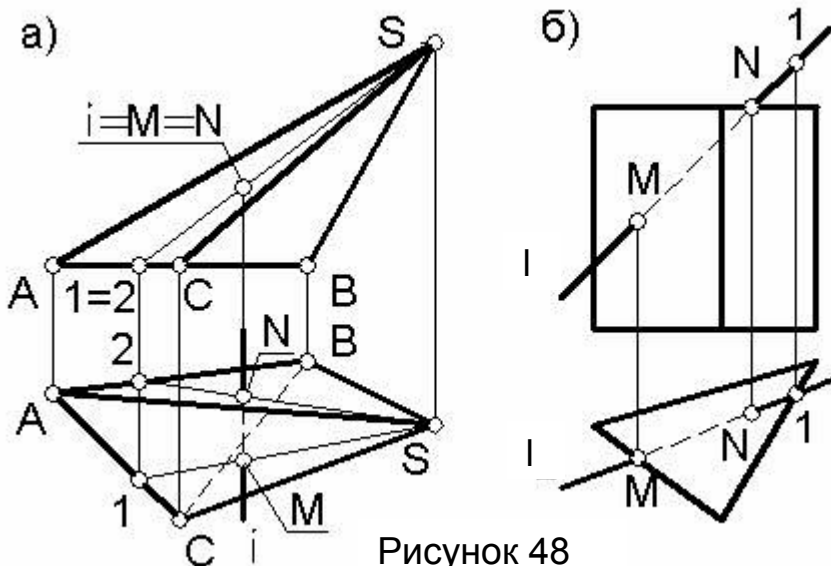


Рисунок 48

**Пример 3.** Построить точки пересечения прямой  $l$  общего положения с поверхностью треугольной призмы, боковые грани которой являются горизонтально проецирующими плоскостями, а основания – горизонтальными плоскостями (рисунок 48б).

Видно, что прямая  $l$  пересекается с левой боковой гранью призмы в точке M, а в точке N с верхним ее основанием. При построении точки M сначала находим ее горизонтальную проекцию (т.к. на виде сверху боковые грани призмы «вырождаются» в ломаную линию), а при построении точки N сначала находится ее фронтальная проекция. Точка 1 не является точкой пересечения прямой с поверхностью призмы; это подтверждает вид спереди.

## 2.4. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Линия пересечения многогранников (*линия перехода*) в общем случае является пространственной ломаной линией. В некоторых случаях она может распадаться на несколько отдельных частей, которые могут быть и плоскими многоугольниками.

Вершинами этой ломаной линии являются точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго, а также ребер второго многогранника с гранями первого. Сторонами линии пересечения являются отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников.

Поэтому построение линии пересечения многогранников сводится к многократному решению задачи на пересечение прямой с плоскостью, а построение сторон этой линии сводится к многократному решению задачи на пересечение плоскостей. Обычно находят вершины линии пересечения, а стороны определяют соединением соответствующих вершин. Ясно, что соединять отрезками прямых можно только те пары вершин, которые лежат в одной и той же грани первого многогранника и в то же время в одной и той же грани второго многогранника. Если же рассматриваемая пара вершин хотя бы в одном многограннике принадлежит разным граням, такие вершины не соединяются.

Порядок соединения вершин линии пересечения определяется проще, если выяснен вопрос с видимостью ребер многогранников. При этом для каждого ребра, на котором есть вершины линии пересечения, отмечена видимость *до* и *после* его пересечения с другим многогранником. Видимыми будут только те видимые ребра каждого многогранника, которые пересекаются с видимыми гранями другого многогранника.

При соединении вершин линии пересечения необходимо учитывать видимость ее звеньев. Видимыми будут те звенья, которые принадлежат одновременно видимым граням обоих многогранников.

Логично, что проекции линии пересечения могут располагаться только в пределах *площади наложения* проекций многогранников. Поэтому если хотя бы на одном виде (проекции) ребро находится вне площади наложения, то это ребро не пересекается с другим многогранником.

Следовательно: ***построение вершин линии пересечения двух многогранников сводится к проведению на поверхности каждого многогранника вспомогательных ломаных линий, конкурирующих с ребрами другого многогранника, и определению точек пересечения этих вспомогательных линий с соответствующими ребрами. Построение сторон линии пере-***



ке  $L$  с гранью  $EE_1FF_1$  и обе эти грани видимы на виде сверху (на горизонтальной проекции), то ребро  $SA$  будет видимым здесь на отрезках  $SK$  и  $LA$ . На виде спереди (на фронтальной проекции) грань  $DD_1EE_1$  видима, а грань  $EE_1FF_1$  невидима, поэтому здесь ребро  $SA$  будет видимым на отрезке  $SK$  и на отрезке от точки, конкурирующей с точкой  $3$  до точки  $A$ . Видимость ребер  $SB$  и  $SC$  определяем аналогично.

Теперь определим точки пересечения ребер призмы с гранями пирамиды. Ребра обоих оснований призмы не пересекают поверхности пирамиды, поскольку их проекции расположены вне площади наложения. Следовательно, остается определить точки пересечения ребер  $EE_1$ ,  $DD_1$  и  $FF_1$  призмы с поверхностью пирамиды. Проведя на поверхности пирамиды вспомогательные линии, фронтально конкурирующие с рассматриваемыми ребрами призмы (на рисунке 49а показана только вспомогательная линия 4-5-6 для ребра  $FF_1$ ), выясняем, что ребра  $EE_1$  и  $DD_1$  не пересекают поверхности пирамиды, а ребро  $FF_1$  пересекает ее в точках  $R$  и  $T$ . Точки вначале определяются на виде сверху (на горизонтальной проекции), а затем проецируются на вид спереди. После нахождения всех вершин линии пересечения поверхностей остается только определить видимость ребер призмы.

Теперь необходимо соединить найденные вершины линии пересечения в определенном порядке. Так как каждая пара вершин  $K$  и  $M$ ,  $M$  и  $P$ ,  $P$  и  $K$  лежит в одной и той же грани пирамиды, а все вместе они находятся в грани  $EE_1D_1D$  призмы (на виде сверху лежат на линиях принадлежащих одной грани), то эти вершины можно соединить попарно. При этом получим треугольник  $KMP$ , являющийся сечением пирамиды гранью  $EE_1D_1D$  (рисунок 49б).

Остальные пять вершин соединяем в следующем порядке:  $L$ - $R$ - $N$ - $T$ - $J$ - $L$ . Основания для этого – у вершин  $L$  и  $R$  общие грани  $SAB$  и  $FF_1E_1E$ , у вершин  $R$  и  $N$  общие грани  $SAB$  и  $FF_1D_1D$ ; у вершин  $N$  и  $T$  общие грани  $SBC$  и  $FF_1D_1D$ ; у вершин  $J$  и  $T$  общие грани  $SBC$  и  $EE_1F_1F$ ; у вершин  $T$  и  $J$  общие грани  $SAC$  и  $EE_1F_1F$ .

Таким образом, линия пересечения состоит из двух замкнутых ломаных линий – треугольника  $KMP$  и пространственного пятиугольника  $LRNTJ$ .

Определяя видимость звеньев линии пересечения отмечаем, что на виде сверху (на горизонтальной проекции) видимыми будут только звенья  $KM$ ,  $KP$ ,  $LR$ ,  $LJ$ , а на виде спереди (на фронтальной проекции) –  $KM$ ,  $MP$ ,  $NT$  и  $NR$ , поскольку эти звенья одновременно лежат на видимых гранях как первого, так и второго многогранника.

**Если при построении линии пересечения двух многогранников поверхность хотя бы одного из них является проеци-**

**рующей, следует использовать «вырождение» ребер и граней этого многоугольника в точки и прямые.**

**Пример 2.** Построить линию пересечения треугольной пирамиды с треугольной призмой, боковая поверхность которой является горизонтально проецирующей (рисунок 50).

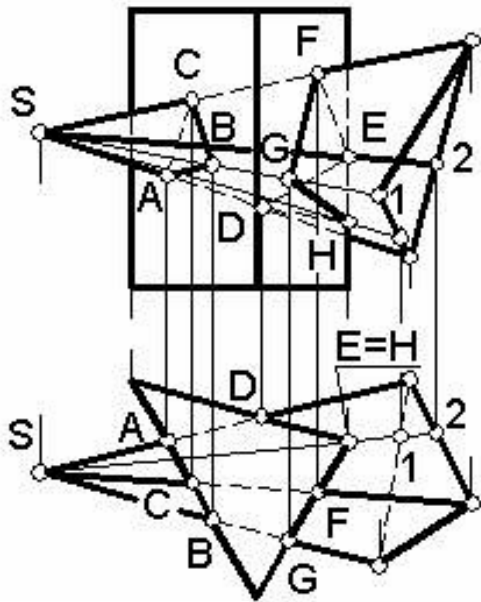


Рисунок 50

Е и Н пересечения правого ребра призмы с гранями пирамиды совпадают с горизонтальной проекцией самого ребра. На виде спереди (на фронтальной проекции) проекции этих точек построены с помощью прямых S-1 и S-2, лежащих в гранях пирамиды, которые пересекает ребро призмы.

Поскольку боковая поверхность призмы на виде сверху проецируется в линию (треугольник), то линия пересечения поверхностей (принадлежащая обеим поверхностям одновременно, в том числе и поверхности призмы) здесь совпадает с изображением поверхности призмы, т.е. с треугольником. Видно, что линия пересечения распадается на две части: треугольник ABC и пространственную замкнутую ломаную DEFGH.

Вершины A, B, C, D, F, G определяются как точки пересечения ребер пирамиды с гранями призмы.

Горизонтальные проекции точек

## ГЛАВА 3

### МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

#### 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТРЕЗКА И УГЛОВ ЕГО НАКЛОНА К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Задачи, в которых выясняются вопросы измерения длин отрезков и углов, определения натуральной формы плоских фигур и другие называются **метрическими задачами**.

Указанные задачи можно выполнить с помощью способа *прямоугольного треугольника*.

Пусть дан отрезок  $AB$  общего положения в системе двух плоскостей проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$  (рисунок 51а). Переместим горизонтальную проекцию отрезка  $A_{\Gamma}B_{\Gamma}$  параллельно самой себе до совмещения точек  $A$  и  $A_{\Gamma}$ . Рассмотрим полученный треугольник  $ABB'$ . Этот треугольник прямоугольный, поскольку проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций. Гипотенузой в нем является сам отрезок  $AB$ , один из катетов равен горизонтальной проекции отрезка, а другой катет – разность высот точек  $A$  и  $B$  (превышение). Угол  $\alpha$ , образованный отрезком  $AB$  и катетом, равным его горизонтальной проекции, является углом наклона отрезка  $AB$  к горизонтальной плоскости проекций.

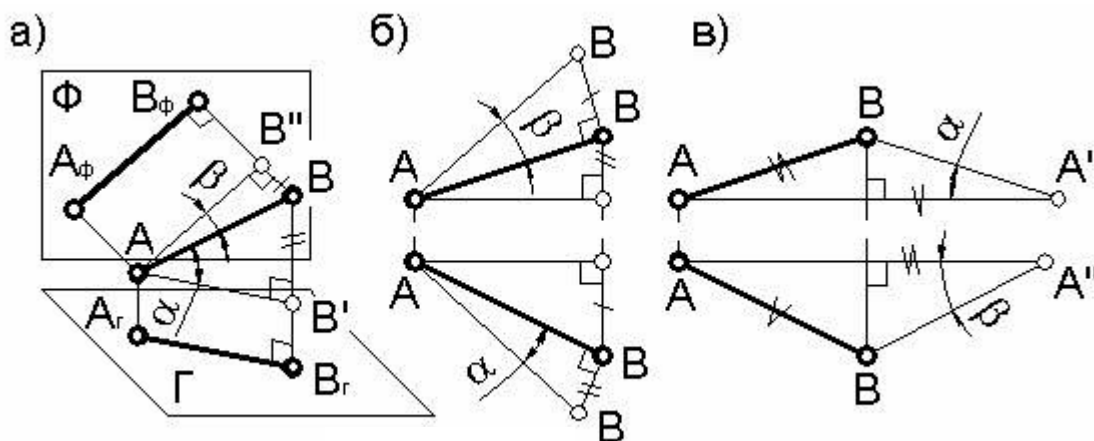


Рисунок 51

Аналогично, перенеся параллельно самой себе фронтальную проекцию отрезка  $A_{\Phi}B_{\Phi}$  до совмещения точек  $A$  и  $A_{\Phi}$  получим прямоугольный треугольник  $ABB''$ . Один из катетов этого треугольника будет равен фронтальной проекции отрезка, а другой – разности глубин одного конца отрезка относительно другого. При этом угол  $\beta$  между гипотенузой  $AB$  и катетом, равным фронтальной проекции

отрезка есть угол наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций.

Таким образом, **натуральная величина отрезка является гипотенузой прямоугольного треугольника, у которого одним из катетов будет любая из проекций, а другим катетом соответственно – высота или глубина одного конца отрезка относительно другого.**

Прямоугольный треугольник с катетами известной величины можно вычертить в любом удобном в конкретной задаче месте чертежа.

На рисунке 51б показано два варианта построения натуральной величины отрезка АВ. В одном случае прямоугольный треугольник построен на горизонтальной проекции данного отрезка, в другом – на фронтальной проекции. Гипотенузы этих треугольников определяют натуральную величину отрезка АВ, а углы  $\alpha$  и  $\beta$  определяют наклон отрезка к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций.

В некоторых случаях удобнее строить прямоугольный треугольник, базируясь не на проекции отрезка, а на *высоте* или *глубине*, как показано на рисунке 51в.

Если в качестве первого катета прямоугольного треугольника принять профильную проекцию отрезка, а второй катет взять равным разности широт конечных точек отрезка, то помимо натуральной величины отрезка из указанного треугольника определится угол наклона отрезка к профильной плоскости проекций  $\gamma$ .

### 3.2. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОГО УГЛА

При решении многих задач существенную роль играет знание условий перпендикулярности на чертеже прямых и плоскостей. Выясним свойства ортогональной проекции “прямого угла”.

Если две стороны какого либо угла (в том числе и прямого) параллельны плоскости проекций, то такой угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину. Кроме этого случая прямой угол проецируется без искажения (т.е. в свою натуральную величину) и тогда, когда только одна из его сторон параллельна плоскости проекций. При этом вторая сторона угла должна быть не перпендикулярной плоскости проекций.

Верно и обратное положение: если хотя бы одна из сторон угла, проецирующегося ортогонально в прямой угол, параллельна плоскости проекций, то проецируемый угол также является прямым.

Докажем эти положения. Предположим, что в пространстве имеются два отрезка АВ и ВС, расположенные перпендикулярно

друг к другу. Иначе говоря, имеем прямой угол  $ABC$ . Сторона  $AB$  этого угла параллельна плоскости проекций  $\Gamma$ , а вторая сторона  $BC$  не перпендикулярна плоскости  $\Gamma$  (рисунок 52).

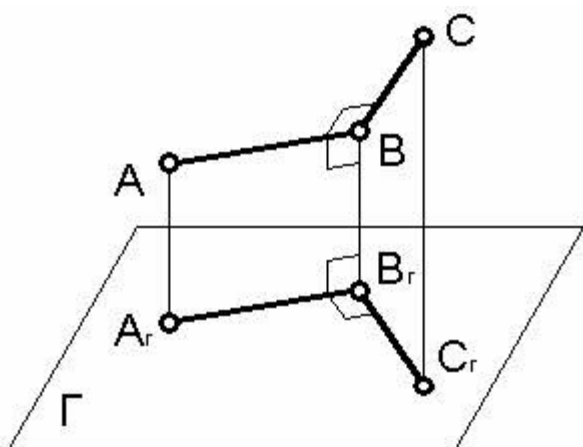


Рисунок 52

Из условия ортогонального (прямоугольного) проецирования следует, что  $BB_\Gamma \perp \Gamma$ , а так как  $AB \parallel \Gamma$ , то  $\angle ABB_\Gamma = 90^\circ$ . Это означает, что прямая  $AB \perp BB_\Gamma$  и  $BC$ , которые лежат в проецирующей плоскости  $BCC_\Gamma B_\Gamma$  и, следовательно, прямая  $AB \perp BCC_\Gamma B_\Gamma$ .

Но так как  $AB \parallel A_\Gamma B_\Gamma$ , то и  $A_\Gamma B_\Gamma \perp BCC_\Gamma B_\Gamma$ . Следовательно,  $A_\Gamma B_\Gamma \perp B_\Gamma C_\Gamma$ , т.е.  $\angle A_\Gamma B_\Gamma C_\Gamma = 90^\circ$ .

Таким образом угол  $A_\Gamma B_\Gamma C_\Gamma$ , являющийся проекцией прямого

угла  $ABC$ , также прямой угол.

Рассмотренные свойства ортогональной проекции прямого угла распространяются как на угол между *пересекающимися* прямыми, так и на угол между взаимно-перпендикулярными *скрещивающимися* прямыми.

Для суждения о перпендикулярности скрещивающихся прямых нужно через произвольно взятую точку пространства провести прямые, параллельные скрещивающимся прямым и по углу между этими прямыми делать вывод о взаимном положении данных скрещивающихся прямых.

Обобщая сказанное выше можно сформулировать следующее:

для того чтобы две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) проецировались ортогонально в виде двух взаимно перпендикулярных прямых, необходимо и достаточно, чтобы одна из них была параллельна, а вторая не перпендикулярна плоскости проекций.

Если применить это обобщение к комплексному чертежу, получим следующую формулировку:

**две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся) только тогда сохраняют свою перпендикулярность на горизонтальной (рисунок 53а,б), фронтальной (рисунок 53в,г) или профильной (рисунок 53д,е) проекции, когда хотя бы одна из этих прямых является соответственно горизонталью, фронталью или профильной прямой.**



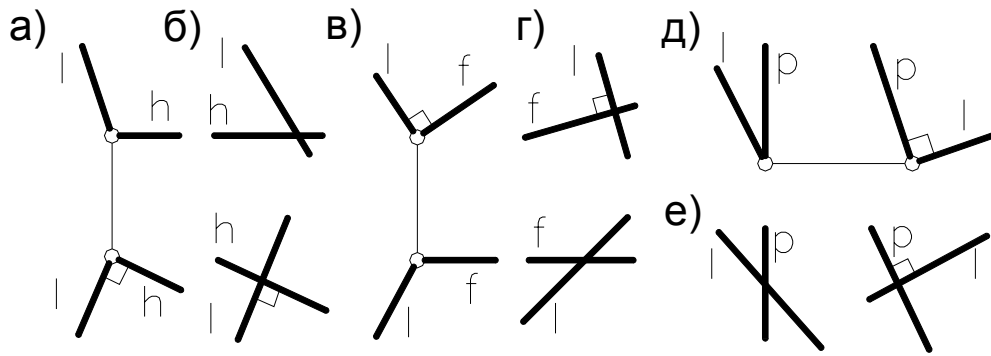


Рисунок 53

Рассмотрим на примерах применение указанных свойств прямого угла.

**Пример 1.** Определить расстояние от точки  $A$  до горизонтали  $h$  (рисунок 54а).

Расстояние от точки до прямой определяется перпендикуляром, опущенным из этой точки на прямую.

Горизонталь является одной из сторон прямого угла и, следовательно, прямой угол с ней будет сохраняться на виде сверху (на горизонтальной проекции), откуда и начинаем решение задачи. Построим здесь перпендикуляр  $AB$  к горизонтали, а затем и на виде спереди (на фронтальной проекции), после чего определяем его истинную величину способом прямоугольного треугольника.

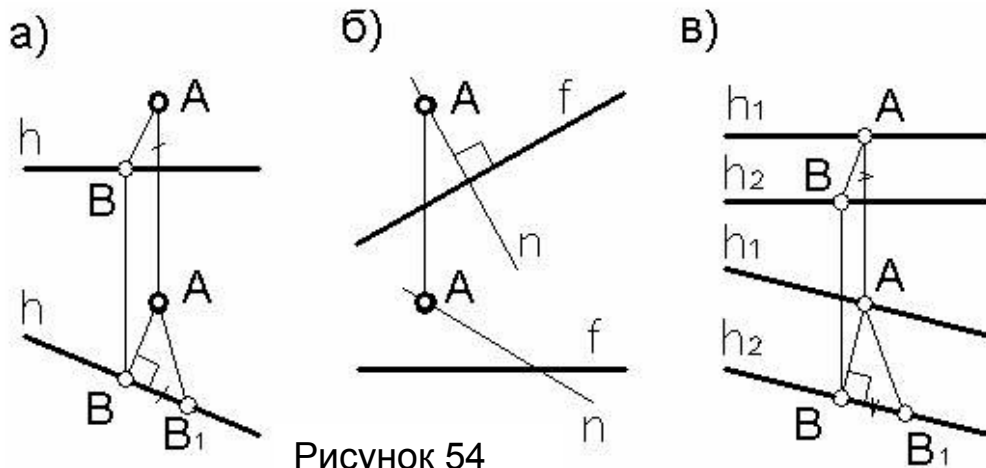


Рисунок 54

**Пример 2.** Через точку  $A$  провести прямую перпендикулярно фронтальной прямой  $f$  (рисунок 54б).

Прямой угол с фронталью сохраняется на виде спереди (на фронтальной проекции), поэтому проводим на этом виде прямую  $n$ .

На виде сверху (на горизонтальной проекции) прямая  $n$  проводится произвольно, т.к. через точку в пространстве можно провести множество прямых перпендикулярных данной прямой.

**Пример 3.** Определить расстояние между параллельными горизонталями  $h_1$  и  $h_2$  (рисунок 54в).

На виде сверху (на горизонтальной проекции) проводим общий для обеих горизонталей перпендикуляр АВ. Для чего на первой горизонтали отмечаем произвольную точку А, из которой опускаем перпендикуляр на вторую горизонталь. Строим его на виде спереди, а затем определяем истинную величину отрезка АВ способом прямоугольного треугольника.

### 3.3. ПРЯМЫЕ НАИБОЛЬШЕГО УКЛОНА ПЛОСКОСТИ

К основным линиям плоскости, помимо горизонтали, фронтали и профильной прямой относятся и так называемые **линии наибольшего уклона** – линии, перпендикулярные к указанным прямым уровня.

**Прямые наибольшего уклона, перпендикулярные горизонталям плоскости, образуют наибольший угол с горизонтальной плоскостью проекций; перпендикулярные фронталям плоскости – с фронтальной плоскостью проекций; перпендикулярные профильным прямым плоскости – с профильной плоскостью проекций.**

В самом деле, если провести в плоскости Б прямую АВ, перпендикулярную к горизонтали этой плоскости  $h$  (рисунок 55) то нетрудно показать, что прямая АВ имеет больший угол наклона к плоскости Г, нежели любая другая (например АС) прямая.

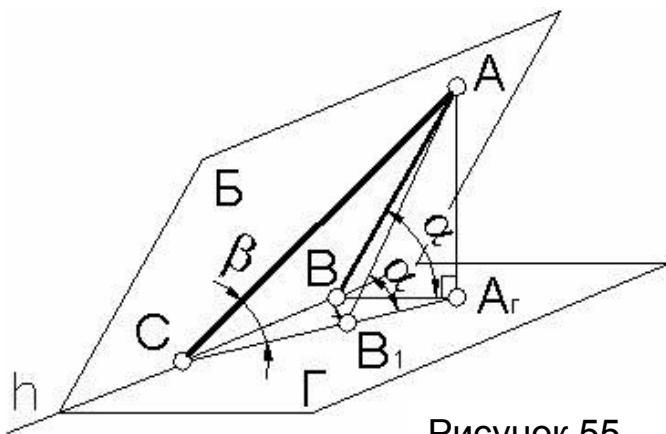


Рисунок 55

Так как угол наклона прямой к плоскости измеряется углом между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость, то углы прямых АВ и АС с плоскостью Г будут соответственно измеряться углами  $\alpha = \angle ABAГ$  и  $\beta = \angle ACAГ$ . Покажем, что  $\alpha > \beta$ .

Для этого рассмотрим два прямоугольных треугольника ААГВ и ААГС с общим катетом ААГ. Здесь АВ – перпендикуляр, а АС – наклонная по отношению к горизонтали  $h$ . Если вращением вокруг ААГ совместить плоскости рассматриваемых треугольников, то прямая АВ займет положение АВ<sub>1</sub> внутри треугольника ААГС. Видно, что  $\angle ABAГ = \alpha$  больше  $\angle ACAГ = \beta$ . Таким образом прямая АВ плоскости Б, перпендикулярная к ее горизонтали  $h$ , является прямой наибольшего уклона к горизонтальной плоскости проекций.

Аналогично можно показать, что прямая плоскости Б, перпенди-

кулярная к фронтальной или профильной прямой этой плоскости, является соответственно прямой наибольшего уклона плоскости Б к фронтальной или профильной плоскости проекций.

Угол между прямой наибольшего уклона АВ и ее проекцией на плоскость АГВ равен линейному углу двугранного угла между плоскостями Б и Г.

Поэтому **измерение двугранного угла между плоскостью общего положения Б и плоскостью проекций может быть сведено к измерению угла между соответствующей прямой наибольшего уклона плоскости Б и ее проекцией на выбранную плоскость проекций.**

Покажем на примере построение линий наибольшего уклона.

**Пример.** Провести в плоскости Б(ΔABC) общего положения через ее точку В прямые наибольшего уклона  $u_r$  и  $u_f$  к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций (рисунок 56).

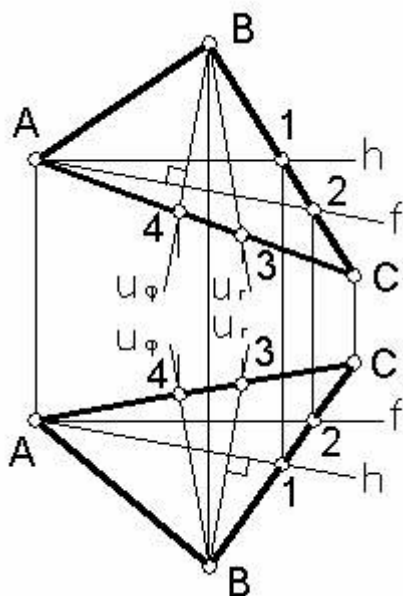


Рисунок 56

Сначала построим прямую наибольшего уклона  $u_r$  к горизонтальной плоскости проекций. Для этого предварительно проведем в плоскости Б горизонталь  $h$ , проходящую, например, через точки А и 1. Поскольку прямая наибольшего уклона к горизонтальной плоскости  $u_r$  должна быть перпендикулярна к горизонталям плоскости, а перпендикулярность к горизонтали сохраняется на горизонтальной проекции (виде сверху), то построение начинаем с вида сверху. Проводим здесь  $u_r$  через точку В. Фронтальную проекцию  $u_r$  находим из условия принадлежности этой прямой плоскости Б, проведя ее через точки В и 2.

Теперь построим прямую наибольшего уклона  $u_f$  к фронтальной плоскости проекций. Для этого проведем в плоскости Б фронталь  $f$  при помощи точек А и 3. Так как прямая наибольшего уклона  $u_f$  к фронтальной плоскости проекций перпендикулярна к фронталям плоскости Б, а эта перпендикулярность сохраняется на фронтальной проекции (виде спереди), то фронтальную проекцию прямой проводим через точку В перпендикулярно к фронтальной  $f$ . Горизонтальную проекцию  $u_f$  находим при помощи точек В и 4 плоскости Б.

### 3.4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Так как прямая  $n$ , перпендикулярная плоскости, перпендикулярна ко всякой прямой этой плоскости, то она перпендикулярна в том числе ко всякой горизонтали  $h$  и ко всякой фронтале  $f$  этой плоскости. Эта перпендикулярность сохраняется (см. 3.2) для горизонтали на горизонтальной проекции, а для фронтали – на фронтальной проекции (рисунок 57).

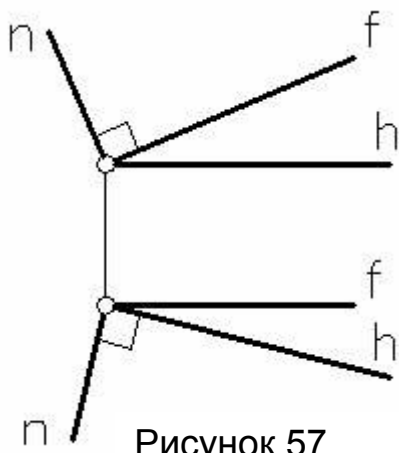


Рисунок 57

Справедливо и обратное утверждение – если горизонтальная проекция какой-либо прямой  $n$  перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали  $h$  некоторой плоскости  $D$ , а ее фронтальная проекция – перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали  $f$  этой плоскости, то прямая  $n$  и плоскость  $D$  взаимно перпендикулярны. Действительно, т.к. прямая  $n$  перпендикулярна к двум прямым  $h$  и  $f$  плоскости  $D$ , которые в общем случае являются пересекающимися прямыми плоскости  $D$ , то она

будет перпендикулярна и к самой плоскости.

В случае, когда плоскость  $D$  является проецирующей плоскостью, нормаль  $n$  к плоскости будет прямой уровня. В этом случае перпендикулярность прямой и плоскости устанавливается по той проекции (виду), где плоскость “вырождается” в линию.

Таким образом,

**прямая и плоскость общего положения перпендикулярны в том случае, когда проекции прямой перпендикулярны одноименным проекциям соответствующих линий уровня плоскости, т.е. горизонтальная проекция прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали.**

**Если плоскость является проецирующей, то прямая, перпендикулярная к ней, будет линией уровня и тогда их взаимная перпендикулярность сохраняется между «вырожденной» проекцией плоскости и соответствующей проекцией прямой.**

Рассмотрим примеры построения перпендикулярных друг к другу прямой и плоскости.

**Пример 1.** Через точку  $A$  плоскости  $B$  ( $\triangle ABC$ ) провести прямую  $n$ , перпендикулярную к плоскости (рисунок 58).

Сначала строим в плоскости Б произвольные горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ , а затем через проекции точки А проводим проекции искомого перпендикуляра  $n$ : на виде спереди (фронтальной проекции) перпендикулярно фронтали  $f$ , на виде сверху (горизонтальной проекции) перпендикулярно горизонтали  $h$ .

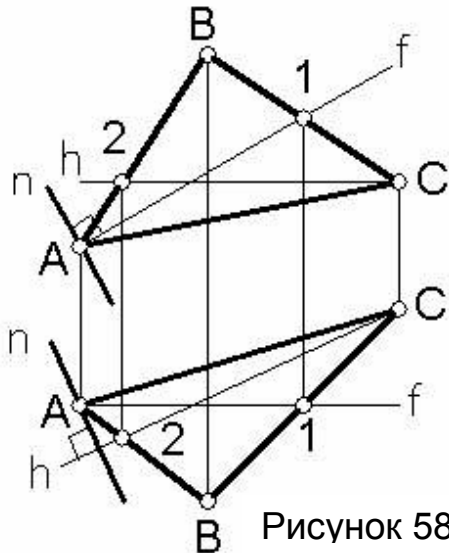


Рисунок 58

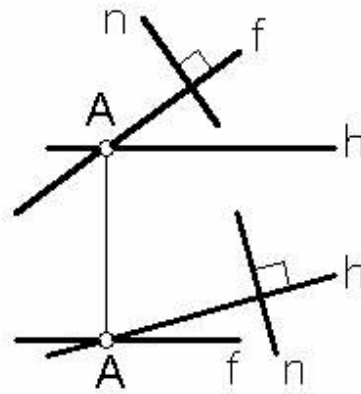


Рисунок 59

Если точка, через которую требуется провести перпендикуляр к плоскости Б находится вне плоскости, построение перпендикуляра производится аналогично. Но учитывая, что основание перпендикуляра есть точка пересечения его с плоскостью, необходимо эту точку найти (см. 1.9).

**Пример 2.** Через точку А провести плоскость Д, перпендикулярную прямой  $n$  (рисунок 59).

Зададим плоскость двумя пересекающимися прямыми: горизонталью  $h$  и фронталью  $f$ . Проведем их через точку А согласно вышеописанному правилу – горизонтальная проекция горизонтали перпендикулярна горизонтальной проекции  $n$ , фронтальная проекция фронтالي перпендикулярна фронтальной проекции  $n$ .

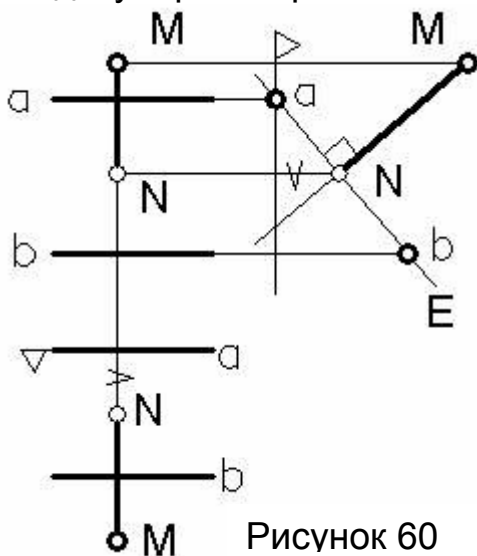


Рисунок 60

**Пример 3.** Построить проекции и определить натуральную величину перпендикуляра, опущенного из точки М на профильно проецирующую плоскость  $E(a//b)$  (рисунок 60).

В этом случае нужно использовать сохранение перпендикулярности между «вырожденной» проекцией плоскости и соответствующей проекцией искомого перпендикуляра. Следует построить профильные проекции точки М и плоскости Е. Опустив пер-

пендикуляр из профильной проекции точки  $M$  на профильную («вырожденную» в линию) проекцию плоскости, найдем точку пересечения перпендикуляра с плоскостью (точка  $N$ ) и его натуральную величину.

### 3.5. ВЗАИМНАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если каждая из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Верно и обратное утверждение: две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

Отсюда следуют два способа построения взаимно перпендикулярных плоскостей  $B$  и  $D$  – плоскость  $B$  проводится через перпендикуляр  $n$  к плоскости  $D$ , или плоскость  $B$  проводится перпендикулярно прямой  $n$ , лежащей в плоскости  $D$ .

Таким образом, **построение взаимно перпендикулярных плоскостей сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.**

**Пример.** Через прямую  $l$  провести плоскость  $B$ , перпендикулярную к данной плоскости  $D(\triangle ABC)$  (рисунок 61).

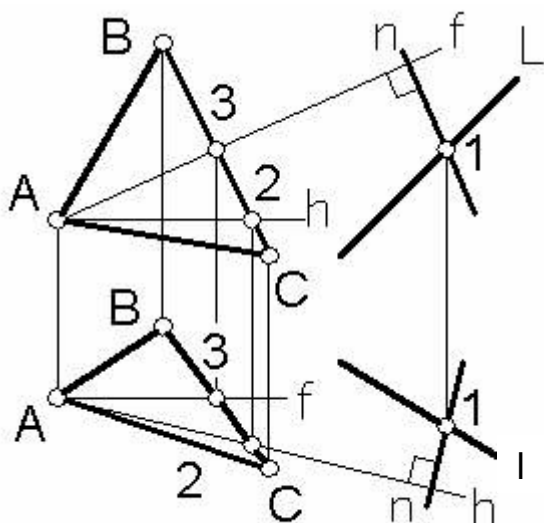


Рисунок 61

В случаях, когда требуется «провести плоскость», удобно задавать эту плоскость пересекающимися прямыми. В качестве первой прямой выбираем прямую  $l$ . Выделив на прямой  $l$  произвольную точку 1, проведем через нее вторую прямую задающую плоскость. Чтобы новая плоскость была перпендикулярной к заданной плоскости  $B$ , необходимо, чтобы этой второй прямой была нормаль  $n$  (перпендикуляр) к плоскости  $B$ . Для построения нормали  $n$  к плоскости  $B$  предварительно строим в ней произвольные горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ , после чего через точку 1 проводим нормаль  $n$  к плоскости  $B$  описанным выше способом (см. 3.4).

Пересекающиеся прямые  $l$  и  $n$  определяют плоскость  $D$ , перпендикулярную к плоскости  $B$ .

### 3.6. ВЗАИМНАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Поскольку прямой угол между прямыми общего положения искажается на всех проекциях, их перпендикулярность приходится сводить к перпендикулярности прямой и плоскости. При этом используется известное положение – две прямые перпендикулярны в том случае, если через каждую из них можно провести плоскость, перпендикулярную к другой.

Таким образом, **построение взаимно перпендикулярных прямых общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.**

**Пример 1.** Из точки  $A$  опустить перпендикуляр на прямую общего положения  $m$  (рисунок 62).

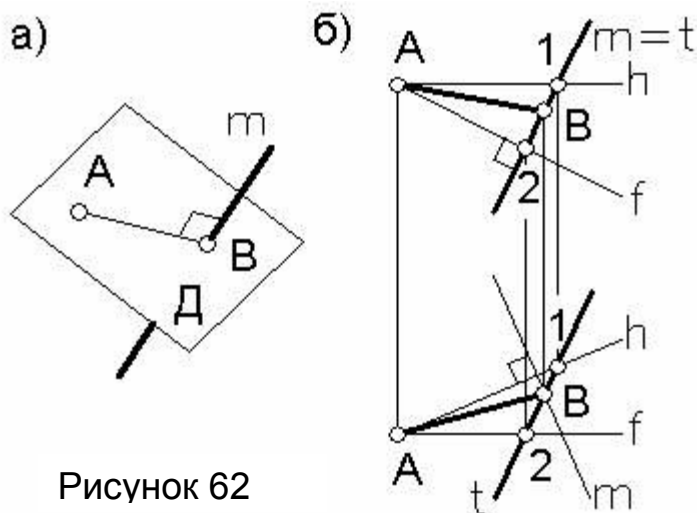


Рисунок 62

Алгоритм решения задачи следующий. Через точку  $A$  проведем вспомогательную плоскость  $D$ , перпендикулярную прямой  $m$  (рисунок 62а), затем определим точку  $B$  пересечения прямой  $m$  с плоскостью  $D$ , после чего соединим точки  $A$  и  $B$ . Отрезок  $AB$  (принадлежащий плоскости  $D$ ) будет перпендикулярен прямой  $m$ .

Вспомогательную плоскость  $D$  задаем двумя пересекающимися прямыми (горизонталью  $h$  и фронталью  $f$ ) проведенными через точку  $A$  перпендикулярно прямой  $m$  (рисунок 62б). При этом необходимо учитывать, что перпендикулярность прямой  $m$  с горизонталью сохраняется на виде сверху (на горизонтальной проекции), а перпендикулярность с фронталью – на виде спереди (на фронтальной проекции).

Теперь при помощи вспомогательной прямой  $t$ , фронтально конкурирующей с заданной прямой  $m$ , находим точку пересечения прямой  $m$  с плоскостью  $D(h \times f)$  – точку  $B$ .

Соединив точки  $A$  и  $B$ , получим отрезок  $AB$  перпендикулярный прямой  $m$ .

**Пример 2.** Определить, перпендикулярны ли прямые  $a$  и  $b$ ? (рисунок 63).

Чтобы выяснить это, построим вспомогательную плоскость  $E$ , перпендикулярную одной из заданных прямых и определим поло-

жение второй прямой относительно вспомогательной плоскости. Если вторая прямая будет принадлежать вспомогательной плоскости или будет ей параллельна, то данные прямые  $\alpha$  и  $b$  взаимно перпендикулярны. При других ситуациях прямые не перпендикулярны.

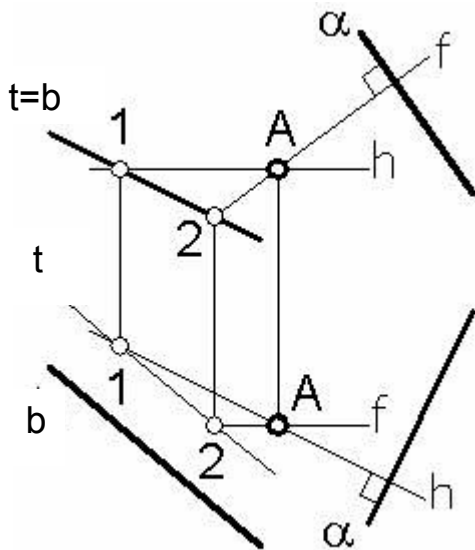


Рисунок 63

Вспомогательную плоскость  $E$  зададим пересекающимися горизонталью  $h$  и фронталью  $f$ , проведенными через произвольную точку  $A$  перпендикулярно, например, прямой  $\alpha$ . Перпендикулярность плоскости  $E$  к прямой  $\alpha$  будет обеспечена, если на виде сверху (на горизонтальной проекции) проекция горизонтали будет перпендикулярна проекции прямой, а на виде спереди (на фронтальной проекции) проекции прямой будет перпендикулярна проекция фронтали. В этом случае плоскость  $E$ , заданная прямыми  $h$  и  $f$ , будет перпендикулярна прямой  $\alpha$ .

Чтобы выяснить положение прямой  $b$  относительно плоскости  $E$ , проведем в плоскости вспомогательную прямую  $t$ , фронтально конкурирующую с прямой  $b$ .



## ГЛАВА 4

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

---

#### 4.1. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА

В конструкторской практике при изображении какого либо оригинала (объекта) на комплексном чертеже стараются располагать его так, чтобы основные элементы оригинала были бы параллельны или перпендикулярны плоскостям проекций. Получающиеся в этом случае «вырожденные» проекции помогают в решении пространственных задач на комплексном чертеже или упрощают ход их решения.

Однако выполнить это условие по отношению ко всем элементам оригинала удается не всегда. Часть из них остается расположена «неудачно» по отношению к плоскостям проекций, т.е. на прямых или плоскостях общего положения. Это осложняет задачи по измерению углов, длин отрезков, определению натуральной формы и размеров плоской фигуры.

С целью упростить решение этих задач производят такое преобразование чертежа, при котором прямые и плоскости, содержащие интересующие нас элементы оригинала, заняли бы частное положение.

Существует несколько способов преобразования чертежа. Здесь мы рассмотрим только два из них: **способ дополнительных видов** (замены плоскостей проекций) и **способ вращения**.

Способ дополнительных видов состоит в том, что при неизменном положении оригинала и основных плоскостей проекций вводится одна или несколько **дополнительных плоскостей проекций**, так, чтобы по отношению к ним интересующие нас прямые и плоскости оказались бы в частном положении.

В способе вращения изменяют положение оригинала в пространстве, поворачивая его вокруг одной или последовательно вокруг двух подходящим образом выбранных осей так, чтобы интересующие нас прямые или плоскости оказались бы в частном положении относительно основных плоскостей проекций.

#### 4.2. ОСНОВЫ СПОСОБА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВИДОВ

Как сказано выше, суть способа состоит в том, что помимо основных плоскостей проекций Г, Ф и П вводится новая дополнительная плоскость проекций, «удобным» образом расположенная относительно оригинала, но перпендикулярная одной из основных плос-

костей. Рассматривая пару плоскостей – дополнительную и ту, которой она перпендикулярна, мы получаем как бы новую систему плоскостей проекций.

Последовательно вводя новые дополнительные плоскости проекций, можно получить такую систему плоскостей, относительно которой интересующий нас элемент оригинала займет удобное для решения конкретной задачи положение.

При решении большинства задач достаточно ввести одну или две дополнительные плоскости проекций.

Рассмотрим ход построения дополнительных видов на комплексном чертеже.

Пусть в системе плоскостей проекций  $\Gamma$  и  $\Phi$  задана точка  $A$ . Введем новую дополнительную плоскость  $D$ , перпендикулярную плоскости  $\Gamma$ , и спроецируем точку  $A$  на эту плоскость. Если в «старой» системе плоскостей проекций точка определялась своими проекциями  $A_\Gamma$  и  $A_\Phi$ , то в «новой» системе плоскостей она определяется проекциями  $A_\Gamma$  и  $A_D$  (рисунок 64а).

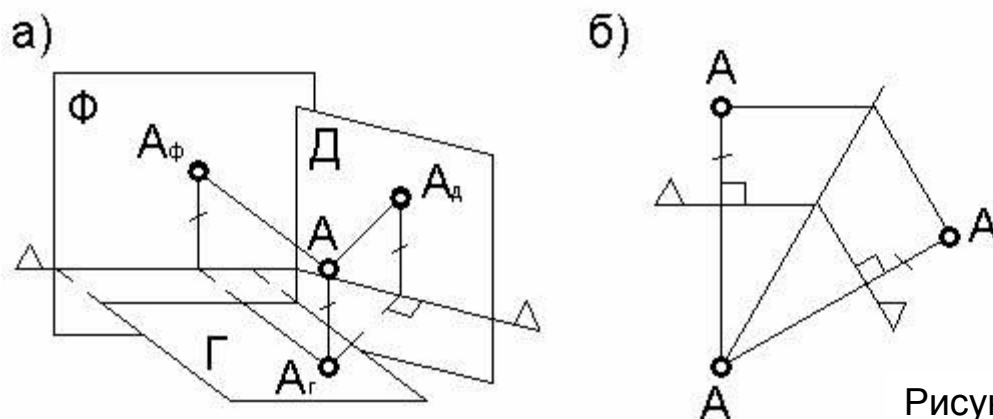


Рисунок 64

Рассмотрим построение дополнительной проекции точки  $A$  на комплексном чертеже. Для этого выясним, какие свойства проекций остаются неизменными при переходе от «старой» системы плоскостей проекций к «новой». Видимо это те свойства, которые связаны со «старой» плоскостью проекций. В нашем случае это горизонтальная проекция точки  $A_\Gamma$  и высота точки  $A$  относительно некоторой горизонтальной базовой плоскости.

Поскольку горизонтальная проекция точки  $A$  остается неизменной, то через нее проводим «новую» линию связи перпендикулярную (т.к. пользуемся ортогональным проецированием) прямой в которую «вырождается» дополнительная плоскость проекций  $D$ .

Теперь проводим базы отсчета высот (проекции базовой плоскости) в удобных местах чертежа перпендикулярно «старой» (на виде спереди) и «новой» (на дополнительном виде) линиям связи (рисунок 64б). Замерив на виде спереди (на фронтальной проекции)

высоту точки А от базы отсчета, отложим ее на дополнительном виде вдоль новой линии связи от базы отсчета. В результате получим дополнительную проекцию точки А.

Сохранение высоты точки А на дополнительной проекции может быть обеспечено и с помощью прямой преломления, являющейся биссектрисой угла, образованного базами отсчета.

Аналогичным образом производится и построение дополнительной проекции на новую плоскость Б, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций Ф (рисунок 65). При этом остаются неизменными фронтальная проекция точки  $A_{\phi}$  и глубина точки относительно некоторой фронтальной базовой плоскости. Поэтому при по-

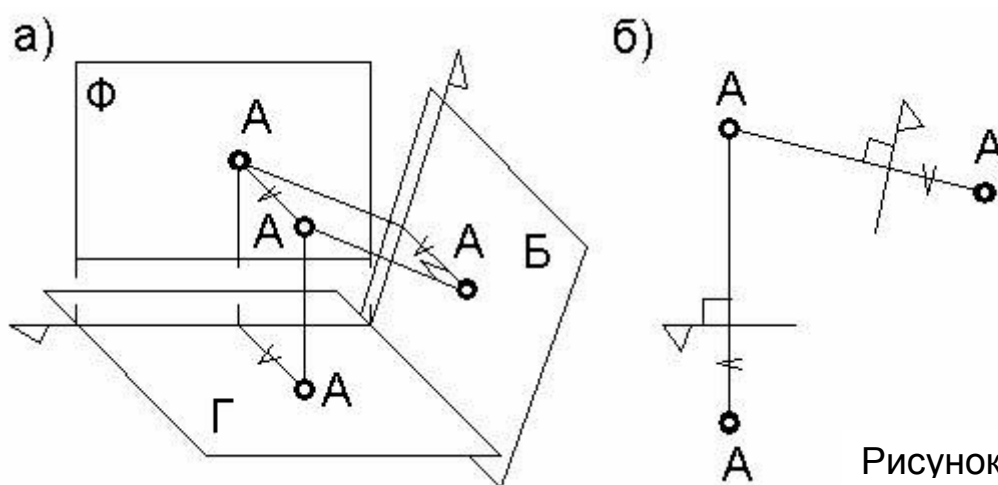


Рисунок 65

строении дополнительной проекции на плоскость Б проводим через неизменную фронтальную проекцию точки А «новую» линию связи, перпендикулярную «вырожденной» в прямую плоскости Б. Также проводим базы отсчета глубин (проекции базовой плоскости) перпендикулярно старой и новой линиям связи, после чего, измерив глубину точки на виде сверху (на горизонтальной проекции), откладываем ее на дополнительной проекции. В результате получаем новую дополнительную проекцию точки на плоскость Б.

Таким образом, **для построения на комплексном чертеже новой проекции точки необходимо:**

- **провести через неизменную проекцию точки новую линию связи перпендикулярно дополнительной плоскости проекций;**
- **провести на дополнительной проекции и через вид от нее базы отсчета расстояний (высот, глубин, широт) перпендикулярные старым и новым линиям связи;**

- *измерить расстояние от старой базы отсчета и отложить его на дополнительном виде от новой базы отсчета.*

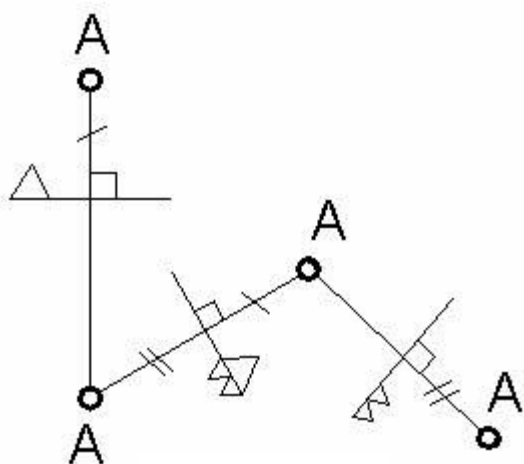


Рисунок 66

Эти правила выполняются и при последовательном построении нескольких дополнительных видов. На рисунке 66 базы отсчета при построении первого и второго дополнительных видов (проекций) совмещены, что удобно для уменьшения количества линий на чертеже. Но это не является обязательным. Здесь одинаковыми знаками отмечены одинаковые расстояния и базы отсчета.

### 4.3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ СПОСОБА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВИДОВ

Так как частных положений у прямой два (прямая уровня и проецирующая прямая) и у плоскости два (плоскость уровня и проецирующая плоскость), то существуют четыре основные задачи для преобразования комплексного чертежа:

- *прямую общего положения сделать прямой уровня;*
- *прямую уровня сделать проецирующей прямой;*
- *плоскость общего положения сделать проецирующей;*
- *проецирующую плоскость сделать плоскостью уровня.*

**Первая задача.** Преобразовать чертеж прямой общего положения так, чтобы относительно новой плоскости проекций прямая общего положения заняла положение прямой уровня.

Новую проекцию прямой, отвечающую поставленной задаче, можно построить на новой плоскости проекций, расположив ее параллельно самой прямой и перпендикулярно одной из основных плоскостей проекций, т.е. перейти от системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций  $\Phi$ ,  $\Gamma$  и  $\Pi$  к некоторой новой системе плоскостей проекций, полученной вышеописанным способом.

На чертеже изображение новой плоскости проекций должно быть параллельно одной из основных проекций прямой. На рисунке 67 построено изображение прямой  $l(A, B)$  общего положения в новой системе плоскостей проекций, причем новая плоскость проекций перпендикулярна горизонтальной плоскости и параллельна (на го-

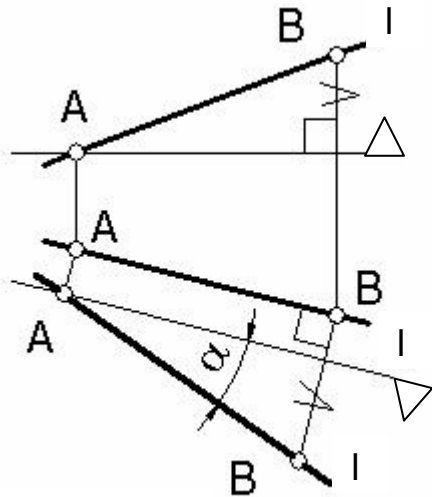


Рисунок 67

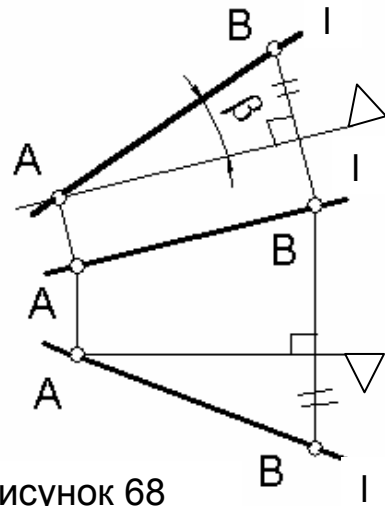


Рисунок 68

ризонгальной проекции) прямой  $l$ . Новые линии связи проведены перпендикулярно новой плоскости проекций.

Новая проекция прямой  $l$  дает истинную величину отрезка  $AB$  и позволяет определить наклон прямой к горизонтальной плоскости проекций (угол  $\alpha$ ).

Угол наклона прямой  $l$  к фронтальной плоскости проекций  $\beta$  можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости, которая будет перпендикулярна фронтальной плоскости проекций и параллельна прямой  $l$  (рисунок 68).

**Вторая задача.** Преобразовать чертеж прямой уровня так, чтобы относительно новой плоскости проекций она заняла проецирующее положение (т.е. проецировалась в точку).

Чтобы на новой плоскости проекций изображение прямой было точкой, новую дополнительную плоскость нужно расположить пер-

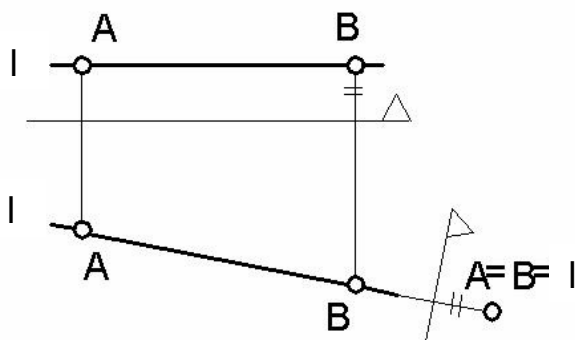


Рисунок 69

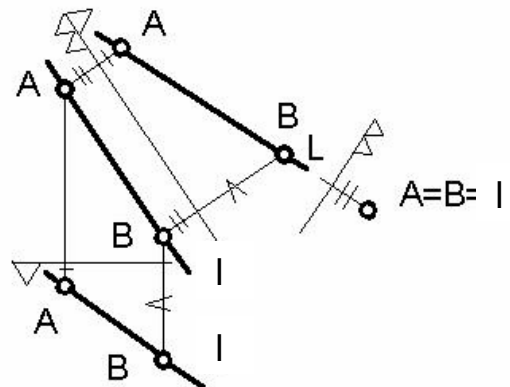


Рисунок 70

пендикулярно данной прямой уровня. Горизонталь будет иметь своей проекцией точку на вертикальной плоскости  $B \perp \Gamma$  (рисунок 69), а фронталь, соответственно, на наклонной плоскости  $D \perp \Phi$ .

Если требуется построить вырожденную в точку проекцию прямой  $l$  общего положения, то для преобразования чертежа потребуется последовательно построить два дополнительных вида. На рисунке 70 исходный чертеж прямой  $l(A, B)$  преобразован следующим образом: сначала построено изображение прямой на плоскости расположенной параллельно самой прямой  $l$ . В новой системе плоскостей проекций она заняла положение линии уровня. Затем введена вторая дополнительная плоскость проекций перпендикулярная самой прямой  $l$ . Так как точки  $A$  и  $B$  прямой находятся на одинаковом расстоянии от первой дополнительной плоскости, то на второй плоскости получаем изображение прямой в виде точки ( $A=B=l$ ).

**Третья задача.** Преобразовать чертеж плоскости общего положения так, чтобы относительно новой плоскости проекций она заняла проецирующее положение.

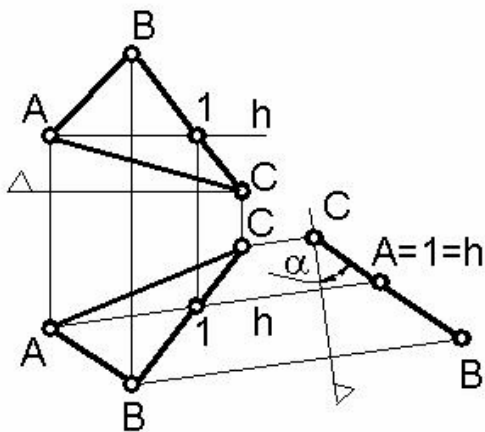


Рисунок 71

Для решения этой задачи новую плоскость проекций нужно расположить перпендикулярно данной плоскости общего положения и перпендикулярно одной из основных плоскостей проекций. Это возможно сделать, учитывая что направление ортогонального проецирования на новую плоскость проекций должно совпадать с направлением соответствующих линий уровня данной плоскости общего положения. Тогда все линии этого уровня на новой

плоскости проекций изобразятся точками, которые и дадут «вырожденную» в прямую проекцию плоскости.

На рисунке 71 показано построение нового изображения плоскости  $D(\Delta ABC)$  в системе плоскостей  $B \perp \Gamma$ . Для этого в плоскости  $D$  построена горизонталь  $h(A, 1)$  и новая плоскость проекций  $B$  расположена перпендикулярно горизонтали  $h$ . Графическое решение третьей задачи приводит к построению изображения плоскости в виде прямой линии, угол наклона которой к новой базе отсчета определяет угол наклона  $\alpha$  плоскости  $D$  к горизонтальной плоскости проекций ( $\alpha = D \wedge \Gamma$ ).

Построив изображение плоскости общего положения  $D$  в системе  $E \perp \Phi$  (дополнительную плоскость  $E$  расположить перпендикулярно-

но фронтали  $f$  плоскости Д), можно определить угол наклона  $\beta$  этой плоскости к фронтальной плоскости проекций.

**Четвертая задача.** Преобразовать чертеж проецирующей плоскости так, чтобы относительно новой плоскости она заняла положение плоскости уровня.

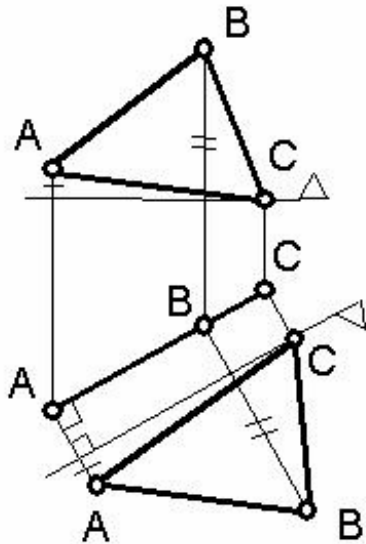


Рисунок 72

Решение этой задачи позволяет определить истинную величину и форму плоской фигуры.

Новую плоскость проекций в этом случае нужно расположить *параллельно* заданной плоскости. Если исходное положение плоскости было *фронтально-проецирующим*, то новое изображение строят в системе  $B \perp \Phi$ , а если *горизонтально-проецирующим*, то в системе  $D \perp \Gamma$ . Новая база отсчета будет расположена параллельно вырожденной проекции проецирующей плоскости. На рисунке 72 построена новая проекция горизонтально проецирующей плоскости  $E(\triangle ABC)$  на плоскость  $D \perp \Gamma$ .

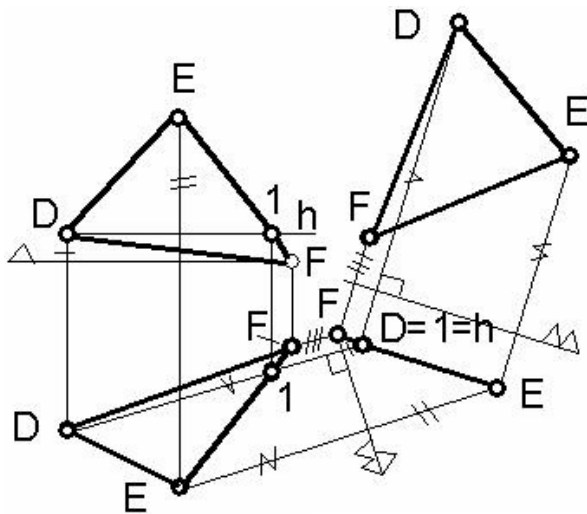


Рисунок 73

Если в исходном положении плоскость занимает общее положение, а нужно получить изображение ее как плоскости уровня, то последовательно строят два дополнительных вида, решая сначала третью задачу, а затем четвертую. При построении первого дополнительного вида плоскость становится проецирующей, а после построения второго – плоскостью уровня (рисунок 73).

Здесь в плоскости  $K(\triangle DEF)$  проведена горизонталь  $h(D,1)$ . Первая база отсчета (обозначена  $\Delta$ ) проведена перпендикулярно ей. Вторая база отсчета (обозначена  $\Delta\Delta$ ) проведена параллельно вырожденной проекции плоскости, а новые линии связи – перпендикулярно вырожденной проекции плоскости. Расстояния для построения проекций точек на второй дополнительной плоскости проекций нужно замерять на плоскости  $\Gamma$  и откладывать по новым линиям связи от второй базы отсчета.

**При решении задач способом дополнительных видов всегда нужно соблюдать следующие правила:**

- **базы отсчета следует выбирать «через вид»;**
- **новые линии связи должны быть перпендикулярны базам отсчета и наоборот, базы отсчета располагают перпендикулярно линиям связи.**

Рассмотрим применение этого способа преобразования комплексного чертежа при решении некоторых задач.

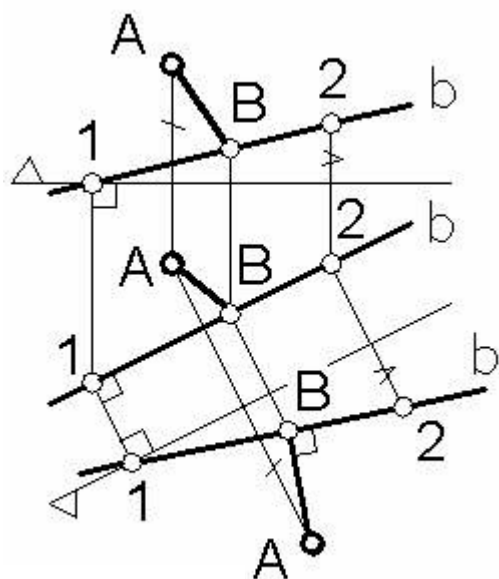


Рисунок 74

проекцию прямой  $b$ , получим проекцию АВ искомого перпендикуляра. Возвращаясь в основную систему плоскостей проекций, получим проекции искомого перпендикуляра

**Пример 2.** Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых  $\alpha$  и  $b$  (рисунок 75).

Среди множества прямых, перпендикулярных к двум данным скрещивающимся прямым, есть только один общий им перпендикуляр, пересекающий обе прямые. Отрезок MN между точками пересечения этого перпендикуляра с прямыми  $\alpha$  и  $b$  является кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Если мы преобразуем чертеж таким образом, что одна из прямых (например  $\alpha$ ), проецируется на дополнительную плоскость Б в точку (рисунок 75а), то общий перпендикуляр MN, будучи перпендикулярным к проецирующей прямой  $\alpha$ , окажется прямой уровня по отношению к дополнительной плоскости Б. Поэтому прямой угол между прямыми MN и  $b$  проецируется на эту плоскость также в прямой угол, а сам отрезок MN проецируется без искажения.

Чтобы преобразовать чертеж указанным образом (т.е. превратить прямую общего положения  $\alpha$  в проецирующую прямую) необ-

**Пример 1.** Опустить перпендикуляр из точки A на прямую общего положения  $b$  (рисунок 74).

Если с помощью построения дополнительного вида сделать данную прямую  $b$  прямой уровня (см. первую задачу), то искомым перпендикуляр провести будет несложно, поскольку мы знаем на какой проекции сохраняется перпендикулярность к прямой уровня. В данном случае перпендикулярность сохранится на дополнительном виде (проекции). Поэтому, опустив перпендикуляр из новой (дополнительной) проекции точки A на



ходимо последовательно решить первую и вторую основные задачи.

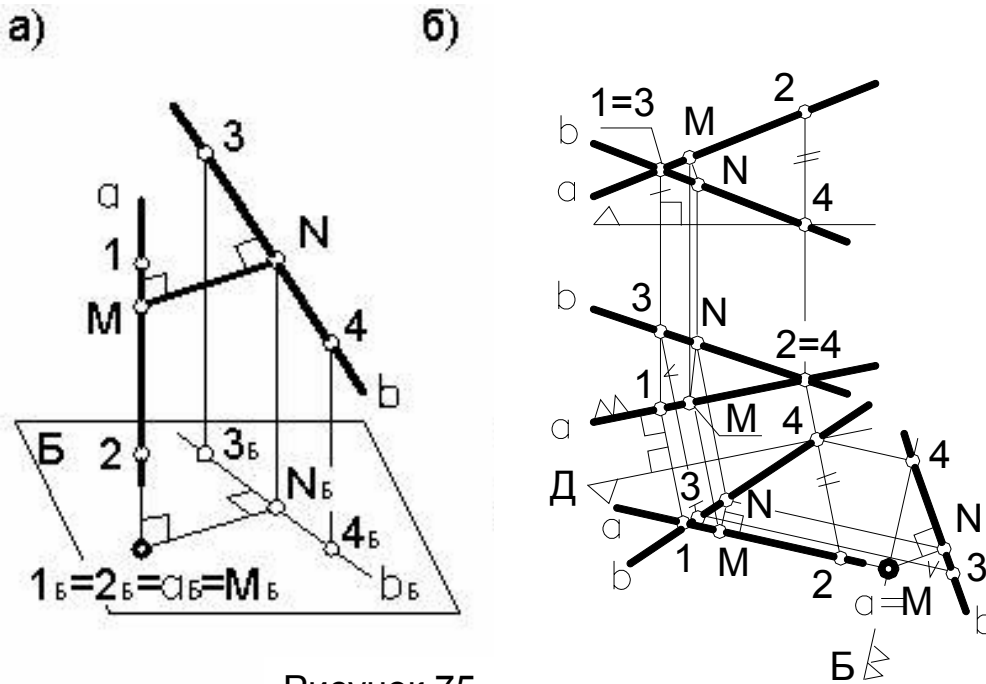


Рисунок 75

Сначала превратим прямую общего положения  $a$  в прямую уровня. Для этого построим первый дополнительный вид на горизонтально проецирующую плоскость  $D$ , параллельную прямой  $a$ . Базу отсчета высот на виде спереди совместим с самой нижней точкой из четырех, а на дополнительном виде – с изображением первой дополнительной плоскости  $D$  (с целью уменьшения линий на чертеже).

Затем введем вторую дополнительную плоскость  $B$ , перпендикулярную теперь уже прямой уровня  $a$ , превращая ее в проецирующую прямую. На втором дополнительном виде получим проекцию прямой  $a$  в виде точки. Опустив из этой точки перпендикуляр на проекцию прямой  $b$ , получим проекцию  $MN$  общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Здесь мы имеем натуральную величину кратчайшего расстояния между этими прямыми. Теперь база отсчета совмещена на виде сверху с прямой  $a$ , а на втором дополнительном виде – с изображением плоскости  $B$ .

Для построения основных проекций общего перпендикуляра  $MN$  будем постепенно возвращаться назад на нашем чертеже. Сначала находим проекцию  $N$  на первой дополнительной плоскости  $D$ , а затем, проведя  $NM$  перпендикулярно к линиям связи, находим и проекцию на эту плоскость точки  $M$  (см. рисунок 75б). Теперь несложно построить и основные проекции искомого перпендикуляра  $MN$ .

**Пример 3.** Из точки  $M$  опустить перпендикуляр на плоскость общего положения  $E(\triangle ABC)$  (рисунок 76).

Если преобразовать чертеж так, чтобы плоскость  $E$  проецировалась на дополнительную плоскость  $B$  в виде прямой линии, то перпендикуляр  $MN$ , опущенный из точки  $M$  на плоскость  $E$ , будет линией уровня по отношению к плоскости  $B$ . Поэтому перпендикуляр  $MN$  проецируется на плоскость  $B$  без искажения (в натуральную величину).

Чтобы превратить плоскость  $E$  в проецирующую плоскость нужно решить третью основную задачу (см. выше).

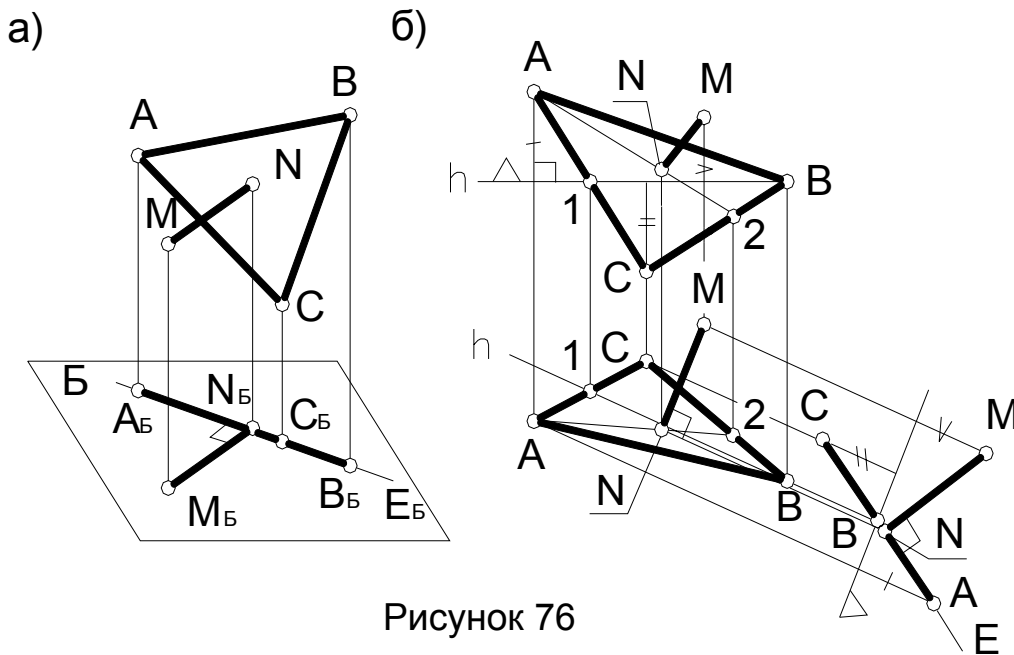


Рисунок 76

Построив дополнительный вид на плоскость  $B$ , сделаем плоскость  $E$  проецирующей плоскостью (рисунок 76б). Здесь, на дополнительном виде, получим проекцию плоскости  $E$  в виде прямой линии. Опустив из дополнительной проекции точки  $M$  перпендикуляр на проекцию плоскости, получим проекцию искомого перпендикуляра  $MN$ . Это его натуральная величина.

Для построения вида сверху (горизонтальной проекции) перпендикуляра  $MN$ , проводим на нем  $MN$  перпендикулярно «новым» линиям связи. Проекцию точки  $N$  (основания перпендикуляра) на виде спереди (фронтальной проекции) находим из условия сохранения высоты точки  $N$  на дополнительном виде и на виде спереди.

С целью контроля точности построений проверим принадлежность точки  $N$  плоскости  $E$  (прямая  $A-2$ ).

**Пример 4.** Построить натуральный вид сечения пирамиды  $ABCS$  плоскостью общего положения  $K(M,N,P)$  (рисунок 77).

Для решения данной задачи необходимо сделать плоскость  $K$  сначала проецирующей плоскостью (третья основная задача), а затем превратить ее в плоскость уровня (четвертая основная задача).

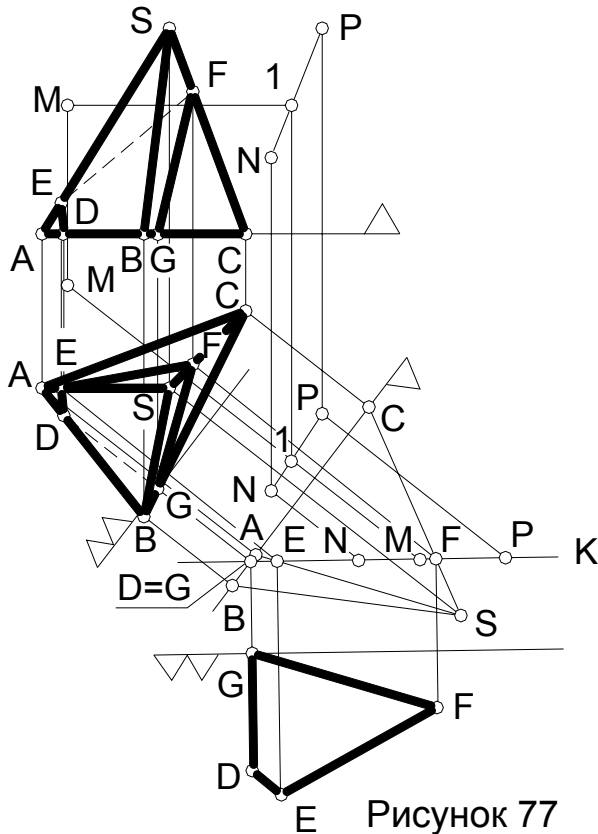


Рисунок 77

Построим первый дополнительный вид на плоскость перпендикулярную к горизонтали  $h$  плоскости  $K$  (задана отрезком  $M-1$ ), превращая плоскость  $K$  в проецирующую. Спроецируем на первую дополнительную плоскость и пирамиду  $ABCS$ . На дополнительной проекции легко находят точки-вершины сечения  $DEFG$ , находящиеся на пересечении плоскости  $K$  с ребрами пирамиды. Возвращаясь на основные виды, строим проекции сечения на них.

Построив второй дополнительный вид на плоскость, параллельную плоскости  $K$ , превращаем последнюю в

плоскость уровня и получаем натуральный вид искомого сечения  $DEFG$ .

Базы отсчета при построении второго дополнительного вида проведены с учетом построения только сечения - на виде сверху через ближнюю к первому дополнительному виду точку сечения  $G$ , на втором дополнительном виде - согласно вышеописанным правилам перпендикулярно «новым» линиям связи.

#### 4.4. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ

Как указывалось ранее, при применении способа вращения изменяется положение оригинала в пространстве. Это достигается вращением его вокруг некоторой оси. В качестве оси вращения обычно выбирают проецирующую прямую или прямую уровня, поскольку при вращении вокруг этих прямых построения на чертеже значительно проще, чем при вращении вокруг прямых общего положения.

Если все же требуется произвести вращение вокруг прямой общего положения, то преобразованием чертежа ее превращают в проецирующую прямую (см. 4.2). После выполнения вращения вокруг проецирующей прямой полученные результаты возвращают в основную систему плоскостей проекций.

При выполнении вращения вокруг некоторой оси  $i$  следует помнить, что вращающаяся точка описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Несомненно, что все точки оригинала при его вращении поворачиваются вокруг оси на один и тот же угол. Точки же расположенные на оси вращения остаются при этом неподвижными.

#### 4.4.1. Вращение точки вокруг проецирующей прямой

Рассмотрим вращение точки  $A$  вокруг горизонтально проецирующей прямой  $i$  (рисунок 78). Плоскость, в которой точка описывает окружность, будет горизонтальной плоскостью уровня, поскольку перпендикулярна к горизонтально проецирующей прямой  $i$ . Окружность, которую описывает точка  $A$  при вращении, проецируется на виде сверху (на горизонтальной проекции) без искажения, а на виде спереди (на фронтальной проекции) – в виде прямой линии перпендикулярной линиям связи.

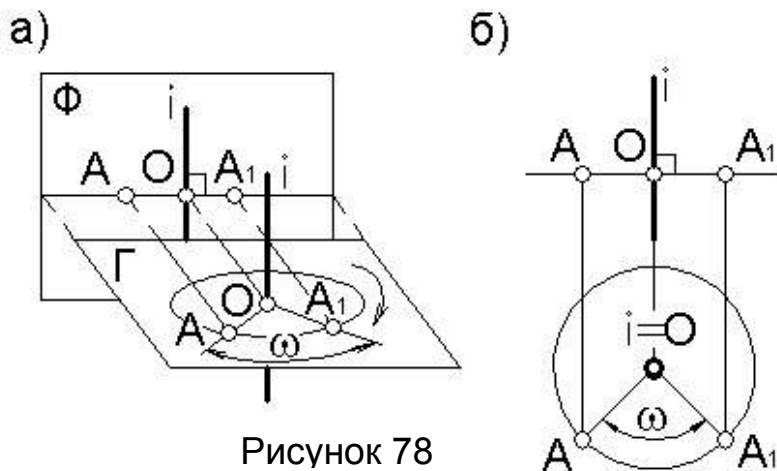


Рисунок 78

В том направлении откладываем угол  $\omega = \angle AOA_1$ , получая при этом горизонтальную проекцию нового положения точки  $A$  –  $A_1$ . Фронтальная проекция нового положения точки  $A$

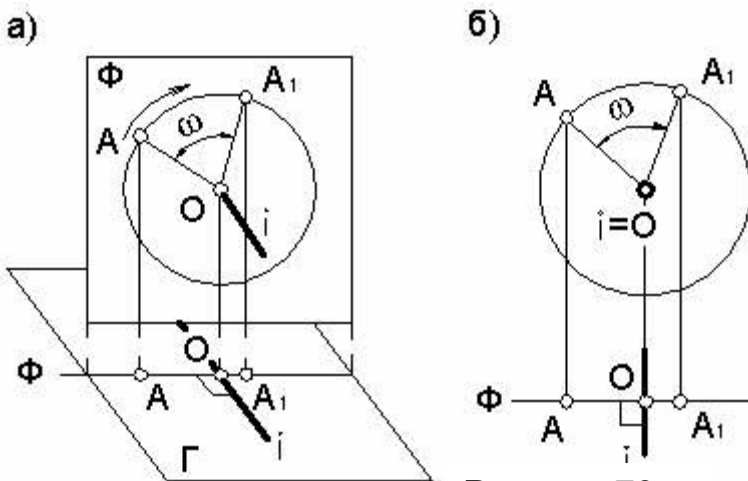


Рисунок 79

Выполним для примера поворот точки  $A$  вокруг оси  $i$  на некоторый угол  $\omega$  по направлению движения часовой стрелки. Для этого на виде сверху (на горизонтальной проекции) проведем окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $AO$ . В нужном направлении откладываем угол  $\omega = \angle AOA_1$ , получая при этом горизонтальную проекцию нового положения точки  $A$  –  $A_1$ . Фронтальная проекция нового положения точки  $A$  определяется на проекции плоскости, в которой происходит вращение точки  $A$ .

Если точка вращается вокруг фронтально проецирующей прямой  $i$ , то плоскость окружности вращения будет фронтальной

плоскостью уровня (рисунок 79). На виде спереди (фронтальной проекции) эта окружность проецируется без искажения, а на виде сверху (горизонтальной проекции) – в виде отрезка прямой, перпендикулярной линиям связи.

Таким образом, **при вращении точки вокруг проецирующей прямой одна проекция точки (та, где прямая “вырождается” в точку) перемещается по окружности, а другая – по прямой перпендикулярной линиям связи.**

#### 4.4.2. Вращение прямой линии вокруг проецирующей прямой

Так как прямая определяется двумя точками, то вращение прямой сводится к вращению этих двух точек.

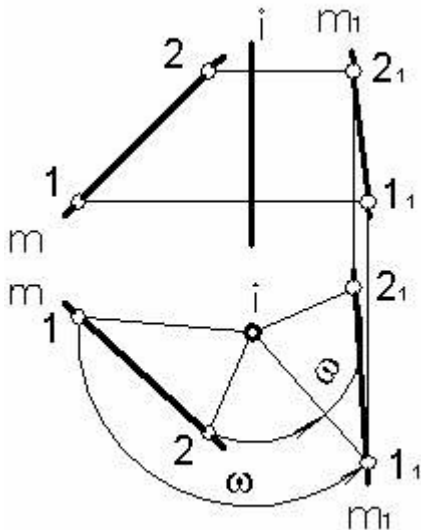


Рисунок 80

Рассмотрим пример поворота прямой общего положения  $m$  на угол  $\omega$  против движения часовой стрелки (рисунок 80).

Выбрав на прямой две произвольные точки 1 и 2, повернем каждую из них в заданном направлении на заданный угол  $\omega$ . Новые положения точек  $1_1$  и  $2_1$  определяют новое положение прямой  $m$  после поворота –  $m_1$ .

Здесь равны треугольники  $\Delta 1-2-i = \Delta 1_1-2_1-i$ , по двум равным сторонам  $1-i = 1_1-i$  и  $2-i = 2_1-i$  и равным углам  $\omega$  между ними. Принимая во внимание, что отрезки  $1-2$  и  $1_1-2_1$  равны (как стороны равных треугольников)

можно сделать вывод: **расстояние между проекциями точек прямой линии при ее повороте на некоторый угол вокруг проецирующей прямой остается неизменным на той проекции, где траектория вращения проецируется без искажения – в виде окружности.**

Это свойство позволяет несколько упростить построение новых проекций прямой при повороте вокруг проецирующей прямой. На рисунке 81 выполнен поворот прямой  $t$  вокруг горизонтально проецирующей прямой  $i$  с применением упрощенных построений. Как и ранее, прямая задана двумя точками 1 и 2. Но если точка 1 выбрана произвольно, то точка 2 определяется как перпендикуляр, опущенный из точки  $i$  (в которую проецируется прямая  $i$ ) на прямую  $t$ .

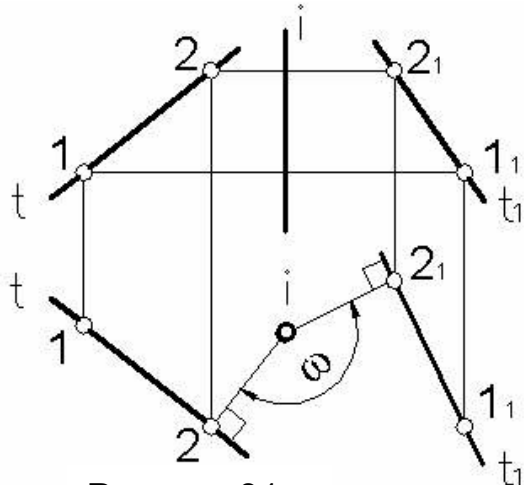


Рисунок 81

Ход построений следующий: точка 2 повернута на заданный угол  $\omega$  вокруг прямой  $i$ . Затем через новое положение точки  $2_1$  на виде сверху (на горизонтальной проекции) перпендикулярно отрезку  $i-2_1$  проводим новое положение прямой  $t$ . Поскольку отрезок 1-2 при вращении не меняет своей длины, то откладывая от точки  $2_1$  его длину до поворота, получаем новое положение горизонтальной проекции прямой  $t$ . Вид спереди (фронтальная проекция) нового положения

прямой  $t$  после поворота находится после определения точек 1 и 2 на траекториях их вращения, «вырожденных» в прямые.

#### 4.4.3. Вращение плоскости вокруг проецирующей прямой

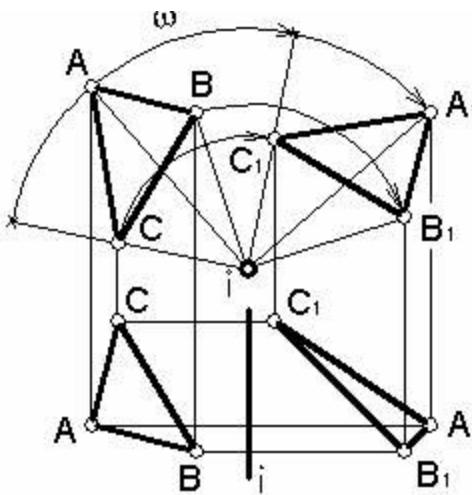


Рисунок 82

Так как плоскость определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой, то вращение плоскости сводится к вращению трех точек ее определяющих.

На рисунке 82 плоскость Б(ΔABC) общего положения повернута вокруг фронтально проецирующей прямой  $i$  на угол  $\omega$  по направлению движения часовой стрелки.

Повернув каждую из точек А, В и С на один и тот же угол  $\omega$  в заданном направлении, получим новые положения точек  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  определяющих новое

положение плоскости после поворота.

Поскольку длины отрезков при вращении сохраняются (см. выше), можно повернуть одну из сторон (например АВ) упрощенным способом, описанным в пункте 4.4.2, при этом будут построены новые положения сразу двух вершин треугольника –  $A_1$  и  $B_1$ . Новое положение третьей вершины можно найти из равенства треугольников  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$  на виде спереди (фронтальной проекции).

#### 4.4.4. О возможностях способов вращения и дополнительного проецирования

Вращением вокруг проецирующих прямых можно решить все четыре основные задачи, решаемые способом дополнительного проецирования. Однако эти решения получаются более громоздкими, поэтому для примера рассмотрим только две из них – первую и третью задачи.

**Пример 1** (первая задача). Превратить прямую общего положения  $m$  в прямую уровня (рисунок 83).

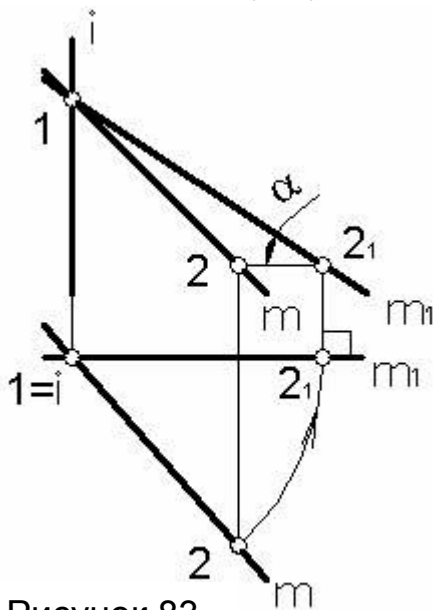


Рисунок 83

Повернем прямую  $m$  до положения *фронтали*. За ось вращения примем горизонтально проецирующую прямую  $i$ , проходящую через произвольную точку 1 прямой  $m$ . При повороте прямой  $m$  эта точка будет неподвижна и для поворота прямой останется повернуть лишь вторую ее точку - 2. Так как горизонтальная проекция прямой  $m$  в своем новом положении должна быть перпендикулярна линиям связи (см. 4.3), то этим определяется угол поворота точки 2. Построив новые положения проекций точки 2 ( $2_1$ ), тем самым определим прямую  $m$  в положении фронтали. На виде спереди (фронтальной проекции) отрезок 1- $2_1$  прямой  $m_1$  проецируется в натуральную величину, а угол  $\alpha$  – истинный угол наклона прямой  $m$  к горизонтальной плоскости проекций.

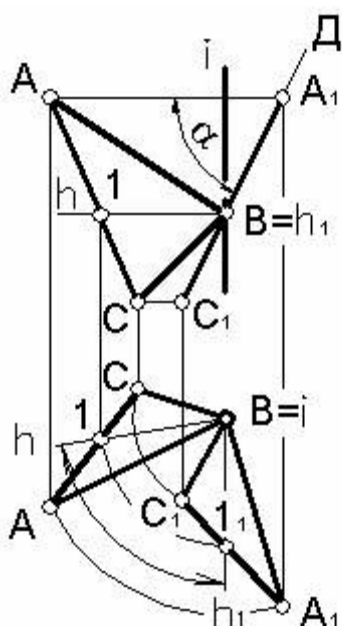


Рисунок 84

Для поворота прямой до положения *горизонтали* нужно за ось вращения принять фронтально проецирующую прямую, проведенную через произвольную точку заданной прямой.

**Пример 2** (третья задача). Превратить плоскость общего положения  $D(\Delta ABC)$  в проецирующую плоскость (рисунок 84).

Повернем плоскость  $D$ , например, до положения фронтально проецирующей плоскости. Для этого ее нужно повернуть вокруг горизонтально проецирующей прямой  $i$  так, чтобы горизонтали плоскости  $D$  стали фронтально проецирующими прямыми. Поскольку при этом на виде сверху (на

горизонтальной проекции) некоторая горизонталь  $h$  займет положение  $h_1$ , параллельное линиям связи, отсюда определится и угол поворота (как угол между «старым» и «новым» положениями горизонтали). Так как ось вращения проходит через одну из вершин треугольника ABC, то на этот угол остается повернуть лишь две оставшиеся вершины – A и C. Новые положения этих вершин  $A_1$  и  $C_1$  совместно с неподвижной вершиной B определяют новое фронтально проецирующее положение плоскости D. Фронтальные проекции точек плоскости D расположатся на одной прямой, в которую “выродится” плоскость на виде спереди. Угол  $\alpha$  между проекцией плоскости D и прямой перпендикулярной линиям связи – есть натура угла наклона плоскости D к горизонтальной плоскости проекций.

Для поворота плоскости D до положения горизонтально проецирующей плоскости, нужно за ось вращения принять фронтально проецирующую прямую, проведенную через какую-нибудь точку плоскости.

Рассмотрим еще два примера применения способа вращения вокруг проецирующих прямых.

**Пример 3.** На прямой общего положения  $\alpha$  от ее точки A отложить отрезок AB заданной длины  $e$  (рисунок 85).

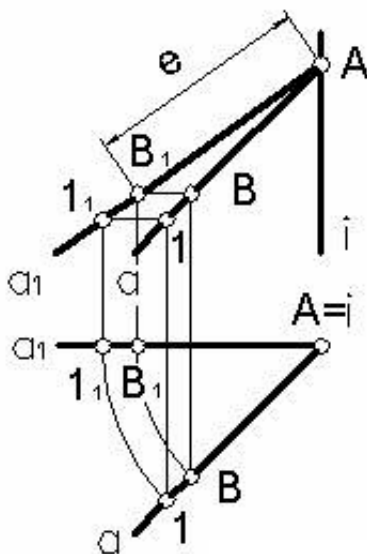


Рисунок 85

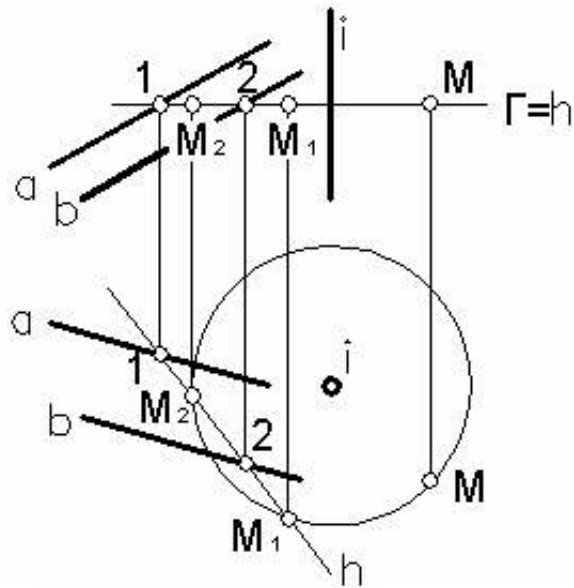


Рисунок 86

Возьмем на прямой  $\alpha$  произвольную точку 1 (не совпадающую с точкой A). Повернем прямую  $\alpha$  вокруг горизонтально проецирующей прямой  $i$ , проходящей через точку A, до положения фронтали. Так как на виде спереди (фронтальной проекции) в этом случае имеем натуру отрезка A-1, то, отложив на натуре отрезка A-1 отрезок AB заданной длины  $e$  и, произведя обратный поворот, найдем на прямой  $\alpha$  проекции искомой точки B. Нужно иметь в виду, что отрезок



длиной  $e$  можно отложить на прямой  $\alpha$  от точки  $A$  и в другую сторону.

**Пример 4.** Повернуть точку  $M$  вокруг горизонтально проецирующей прямой  $i$  до совмещения ее с плоскостью  $B(\alpha//b)$  (рисунок 86).

При вращении вокруг прямой  $i$  точка  $M$  будет описывать окружность в горизонтальной плоскости  $\Gamma$ . Поэтому точка  $M$  окажется в плоскости  $B$  тогда, когда она будет находиться на линии пересечения плоскостей  $B$  и  $\Gamma$ , т.е. на горизонтали  $h$  плоскости  $B$ . Проведя на виде сверху (горизонтальной проекции) окружность радиуса  $iM$ , получим в пересечении ее с горизонтальной проекцией горизонтали  $h$  два новых положения точки  $M$  –  $M_1$  и  $M_2$ .

В нашем случае горизонталь  $h$  пересекает окружность (траекторию вращения точки  $M$ ) дважды, т.е. задача имеет два решения. Если бы горизонталь  $h$  касалась окружности – задача имела бы одно решение, а если бы проходила вне ее – это означало бы отсутствие решения.

## 4.5. СПОСОБ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ ПРЯМОЙ УРОВНЯ

### 4.5.1. Вращение точки

Рассмотрим вращение некоторой точки  $A$  вокруг горизонтали  $h$ . Вращаясь, точка  $A$  опишет при этом окружность в плоскости  $D$ , перпендикулярной оси вращения  $h$ . В данном случае эта плоскость будет горизонтально проецирующей и, следовательно, проецируется на горизонтальную плоскость проекций  $\Gamma$  в виде прямой линии, перпендикулярной к проекции горизонтали  $h$  (рисунок 87а). Для упрощения чертежа на этом рисунке плоскость  $\Gamma$  зафиксирована на уровне горизонтали  $h$ .

Как правило, этот способ используют для *совмещения* точки с плоскостью. Новое положение точки  $A$  построим, определив ее радиус вращения  $r$ . Действительно, при совмещении точки  $A$  с гори-

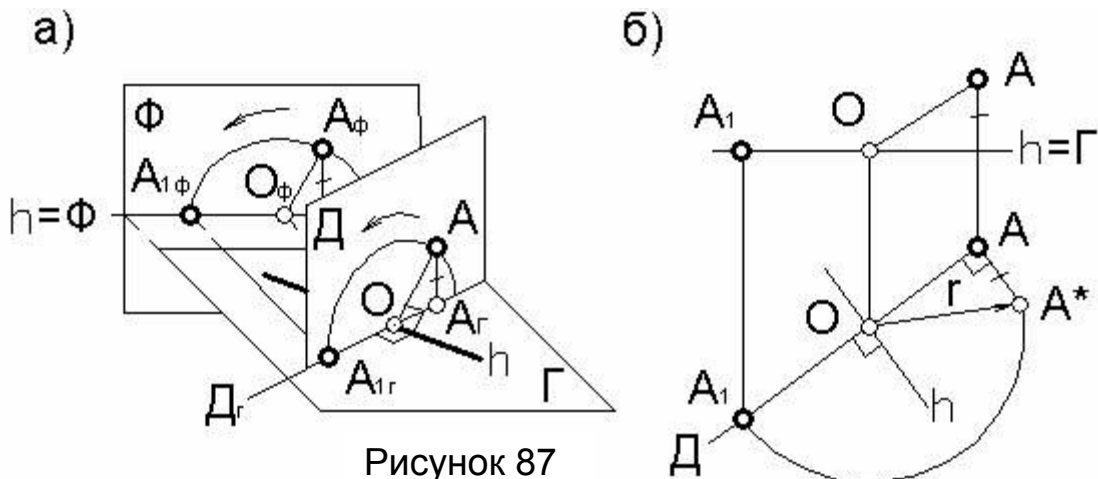


Рисунок 87

горизонтальной плоскостью  $\Gamma$ , ее новое положение  $A_1$  будет находиться на расстоянии равном радиусу вращения  $r$  от проекции центра вращения  $O$ .

Натуральную величину радиуса вращения  $r$  можно определить способом прямоугольного треугольника. На рисунке 87а в прямоугольном треугольнике  $OAA_\Gamma$  радиус вращения  $r$  является гипотенузой, а катетами – горизонтальная проекция радиуса вращения ( $OA_\Gamma$ ) и превышение точки  $A$  над точкой  $O$  (горизонтальной плоскостью  $\Gamma$ ).

На рисунке 87б показан ход построений на комплексном чертеже. Через проекцию точки  $A$  перпендикулярно горизонтали  $h$  проводится прямая, в которую «вырождается» плоскость вращения  $D$ . В пересечении  $D$  и  $h$  находится проекция центра вращения  $O$ . При помощи прямоугольного треугольника  $OAA^*$  (катеты которого указаны выше) находим натуральную величину радиуса вращения  $r$  точки  $A$ . Отложив на прямой, в которую «выродилась» плоскость  $D$ , от точки  $O$  натуру радиуса вращения  $r$ , получим новую, совмещенную с горизонтальной плоскостью  $\Gamma$ , проекцию точки  $A$ .

На виде спереди (фронтальной проекции) новое положение проекции точки  $A$  находим из условия совмещения точки с горизонтальной плоскостью.

Аналогично производится вращение точки вокруг фронтали.

#### 4.5.2. Вращение плоскости вокруг прямой уровня

Как отмечалось выше, основной целью указанного вращения является совмещение с плоскостью уровня. В результате такого совмещения определяется натуральная форма и размеры любой фигуры. Можно так же, построив в данной плоскости фигуру необходи-

мой формы и размеров, «вернуть» ее на основные виды (проекции).

Рассмотрим на примере вращение плоскости  $B(\triangle ABC)$  вокруг прямой уровня (в нашем примере горизонтали  $h$ ) до совмещения с горизонтальной плоскостью  $\Gamma$  (рисунок 88).

Сначала проведем в данной плоскости горизонталь  $h$ , например через точку  $C$  и вспомогательную точку  $1$ . При таком выборе оси вращения проекции треугольника «до» и «после»

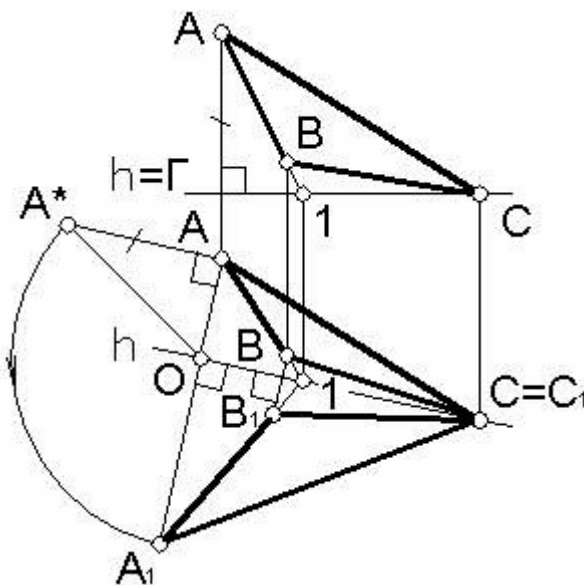


Рисунок 88

поворота не будут накладываться друг на друга. При вращении точки  $C$  и  $1$ , как находящиеся на оси вращения, будут неподвижными.

Проведем плоскость  $\Gamma$  через горизонталь  $h$  и определим совмещенную с ней проекцию точки  $A$ . Для этого через горизонтальную проекцию (вид сверху) точки  $A$  проведем прямую перпендикулярную горизонтали  $h$ . Эта прямая – «вырожденная» проекция плоскости вращения точки  $A$ . Отложим от центра вращения  $O$  натуральную величину радиуса вращения  $r$ , которую предварительно определим с помощью прямоугольного треугольника  $OAA^*$ .

Для нахождения «совмещенной» проекции точки  $B$  нет необходимости находить радиус ее вращения. Она определится в пересечении прямой  $A1-1$  с прямой, в которую «вырождается» плоскость вращения точки  $B$  на виде сверху.

Полученный после совмещения с горизонтальной плоскостью треугольник  $A_1B_1C$  дает натуральную форму и размеры заданного треугольника  $ABC$ .

Таким образом, **при вращении плоской фигуры вокруг ее прямой уровня для построения «совмещенной» проекции, необходимо определить радиус вращения только одной точки. «Совмещенные» проекции других точек можно построить, используя неподвижные точки прямых, на которых находятся эти точки.**

### 4.5.3. Измерение углов

Способ вращения вокруг прямой уровня имеет ограниченное применение. Однако он удобен для определения натуральной формы и размеров любой плоской фигуры и натуральных углов между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.

Покажем это на конкретных примерах.

**Пример 1.** Определить натуральную величину угла между двумя скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  (рисунок 89).

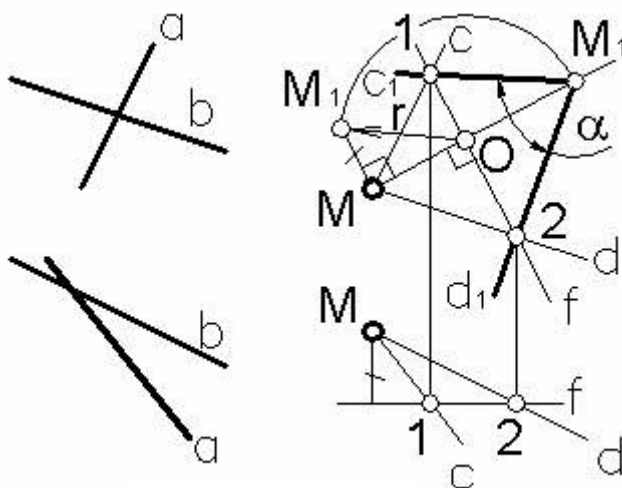


Рисунок 89

Для этого проводим через произвольную точку пространства  $M$  прямые  $c$  и  $d$ , соответственно параллельные прямым  $a$  и  $b$ , так как известно, что угол между двумя пересекающимися прямыми будет равен углу между параллельными им скрещивающимися прямыми.

Далее повернем плоскость угла, заданного прямыми  $c$  и  $d$ , вокруг фронтали  $f$  этой плоскости (прямой уровня) до совмещения ее с фронтальной плоскостью  $\Phi$ , проходящей через фронталь  $f$ .

Плоскость вращения вершины угла  $M$  вокруг фронтали  $f$  «выродится» на виде спереди (фронтальной проекции) в прямую линию. Определив с помощью прямоугольного треугольника  $ОММ^*$  натуральную величину радиуса вращения  $r$  и отложив ее на прямой (в которую «выродится» плоскость вращения точки  $M$ ) от центра вращения  $O$ , получим совмещенную с фронтальной плоскостью проекцию точки  $M$ . Соединив ее с неподвижными проекциями точек 1 и 2, построим тем самым «совмещенную» проекцию угла прямых  $c$  и  $d$ . Угол между ними определит натуральную величину искомого угла  $\alpha$  между  $c$  и  $d$ , равного углу между прямыми  $a$  и  $b$ .

**Пример 2.** Определить величину двугранного угла, образованного плоскостями  $B(\triangle ABC)$  и  $D(a//b)$  (рисунок 90).

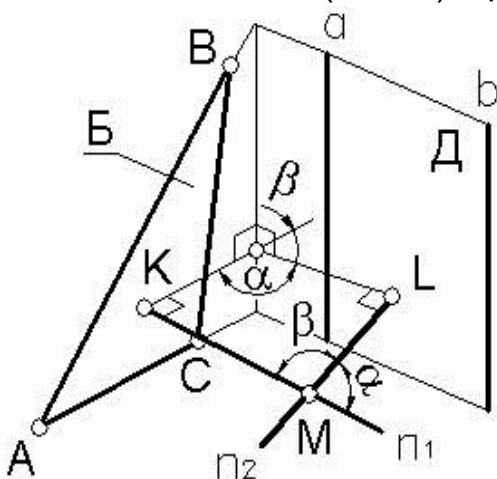


Рисунок 90

Если бы ребро двугранного угла (линия пересечения плоскостей) было задано, величину этого угла можно было бы определить способом дополнительного вида, превратив ребро в проецирующую прямую (см. 4.2).

Но поскольку ребро двугранного угла не задано, не будем его находить, решим задачу иным способом.

Из произвольной точки пространства  $M$  опустим перпендикуляры  $n_1$  и  $n_2$  на плоскости  $B$  и  $D$ . В

плоскости этих перпендикуляров при точке  $M$  получим два плоских угла  $\alpha$  и  $\beta$ , которые равны линейным углам двух смежных двугранных углов, образованных плоскостями  $B$  и  $D$ .

Определив натуральные величины углов между перпендикулярами  $n_1$  и  $n_2$  путем вращения вокруг прямой уровня (см. пример 1), решим задачу без построения ребра двугранного угла.

**Пример 3.** Определить натуральную величину угла  $\alpha$  между прямой  $c$  и плоскостью  $B$  (рисунок 91).

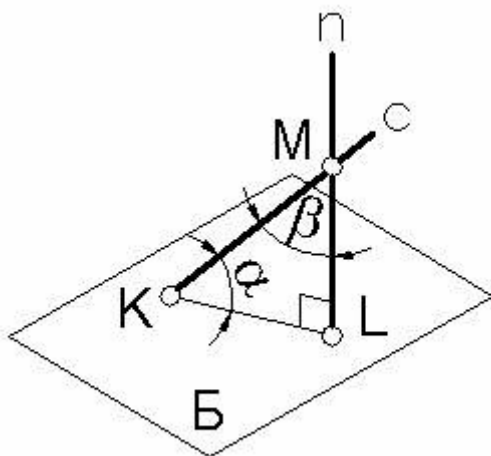


Рисунок 91

Искомый угол  $\alpha$  есть угол между прямой  $c$  и ее проекцией на плоскость  $B$ . Можно найти его следующим

образом: из произвольной точки  $M$  прямой  $c$  провести перпендикуляр  $n$  к плоскости  $B$ . Чтобы построить треугольник  $MKL$  (из которого и найдется угол  $\alpha$ ), потребуется определить точки пересечения  $K$  и  $L$  прямых  $c$  и  $n$  с плоскостью  $B$ . Это не сложно, но требует дополнительных построений, которых можно избежать, если определить натуру угла  $\beta$  между прямыми  $c$  и  $n$ . Этот угол является дополнительным к искомому углу  $\alpha$  до  $90^\circ$ . Угол  $\beta$  определяется путем вращения вокруг прямой уровня (см. пример 1). После нахождения угла  $\beta$  остается дополнить его до  $90^\circ$ . Это дополнение даст натуральную величину угла  $\alpha$ .

#### 4.5.4. Построение в плоскости общего положения фигуры заданной формы и размеров

Рассмотрим пример построения в плоскости общего положения  $D(\alpha \times b)$  правильного шестиугольника со стороной равной  $e$  и с центром в данной точке  $O$ . Одна из сторон шестиугольника должна быть параллельна прямой  $b$  (рисунок 92).

Прежде чем выполнить необходимые построения, повернем плоскость  $D$  вокруг ее горизонтали  $h$  до совмещения с горизонтальной плоскостью  $\Gamma$ , проведенной через горизонталь.

Для этого построим «совмещенную» проекцию точки пересечения прямых  $M$ , определив натуру радиуса вращения  $r$  способом прямоугольного треугольника  $OMM^*$ . Соединяя «совмещенную»

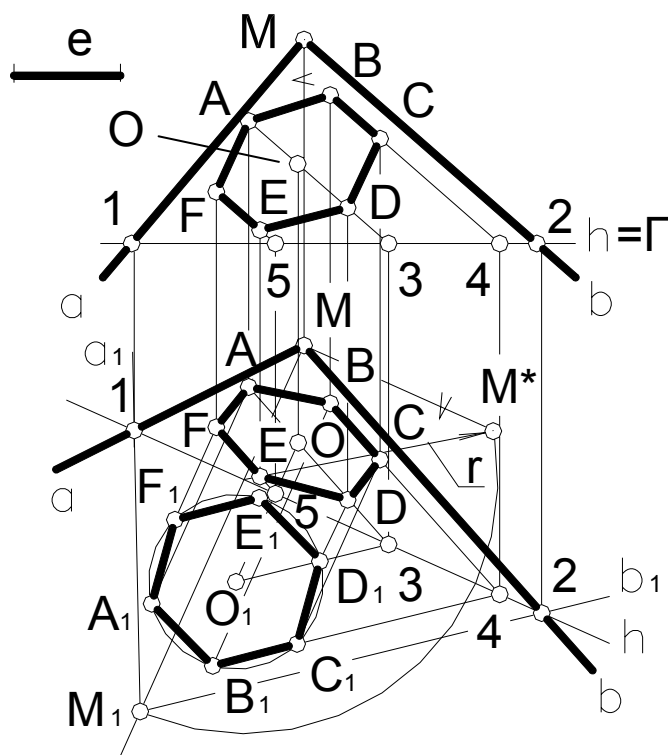


Рисунок 92

проекцию точки  $M$  с неподвижными при вращении точками 1 и 2, получим «совмещенную» с горизонтальной плоскостью проекцию плоскости  $D$ . На этой проекции любая фигура лежащая в плоскости имеет натуральную форму и размеры. Проекцию центра  $O_1$  шестиугольника находим здесь с помощью прямой  $O-3$  параллельной заданной прямой  $b$ , лежащей в плоскости  $D$  и определяемой неподвижной точкой 3.

Строим правильный шестиугольник с центром

в точке  $O_1$  и стороной равной  $e$  (при помощи окружности радиусом  $e$  с центром в указанной точке  $O_1$ ). Расположим шестиугольник так, чтобы одна из его сторон была параллельна прямой  $b$ , как того требуют условия задачи. Затем обратным построением находим горизонтальную и фронтальную проекции шестиугольника. Для нахождения проекций его вершин используем прямые плоскости  $D$ , параллельные прямой  $b$  и определяемые неподвижными точками 3,4 и 5 горизонтали  $h$ .

Анализируя приведенные примеры, можно сделать вывод, что **при решении пространственных метрических задач оправдано применение способа дополнительных видов, а при решении плоских метрических и сводимых к ним задач – способа вращения вокруг прямых уровня.**

## ГЛАВА 5

### КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

#### 5.1. КРИВЫЕ ЛИНИИ И ИХ ПРОЕКЦИИ

##### 5.1.1. Плоские кривые

Плоской кривой называют линию, все точки которой лежат в одной плоскости, определяемой любыми тремя точками этой кривой и не лежащими на одной прямой.

Наиболее часто встречающимися на практике плоскими кривыми являются кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола и гипербола. Порядок кривой определяется степенью их алгебраического уравнения или максимальным числом точек пересечения ее с прямой. Говоря о кривых второго порядка, имеют в виду, что они пересекаются с прямой не более чем в двух точках. К плоским кривым относятся также различные закономерные кривые: синусоида, циклоида, архимедова спираль и другие.

Известные свойства параллельного проецирования позволяют установить, какие свойства кривых сохраняются у их проекций. Так касательная к кривой проецируется как касательная к ее проекции, а линия пересекающая плоскую кривую— как пересекающая проекцию плоской кривой. При этом число точек пересечения с кривой сохраняется, что означает, что порядок плоской кривой при параллельном проецировании сохраняется.

Кривую линию называют *гладкой кривой*, если в каждой из ее точек можно провести только одну касательную  $t$ , непрерывно изменяющуюся от точки к точке.

Различают *обыкновенные* и *особые* точки кривых. На рисунке 93 кроме обыкновенной точки М, показаны некоторые особые точки: N- точка перегиба, Р- точка возврата первого рода, Q- точка возврата второго рода, R- узловая точка, Т- точка излома. При проецировании все эти особенности точек кривой сохраняются, что позволяет судить о характере плоской кривой по ее проекции.

Построение проекций плоской кривой линии, лежащей в плоскости общего положения удобно производить при помощи вышеописанного способа совмещения

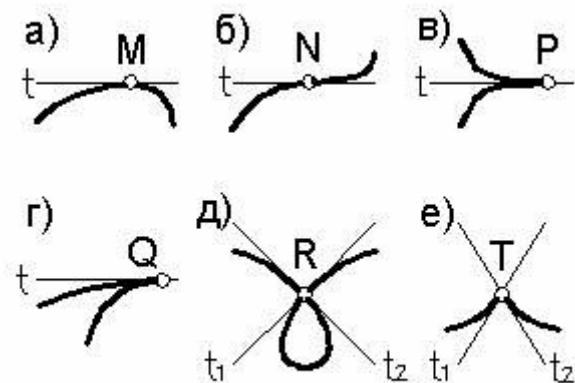


Рисунок 93

(см. 4.5.4 и рисунок 92). Построение проекций точек кривой линии выполняют так же, как и для точек плоского многоугольника.

### 5.1.2. Ортогональная проекция окружности

В конструкторской практике довольно часто встречается построение проекций окружности, поэтому выясним подробнее некоторые свойства ортогональной проекции окружности.

Известно, что параллельной проекцией окружности является кривая, которую называют *эллипсом*. Так, проецируя окружность с центром в точке  $O$ , лежащую в плоскости общего положения  $B$  например на плоскость  $\Gamma$ , получим ее проекцию в виде эллипса с центром в точке  $O_\Gamma$  (рисунок 94).

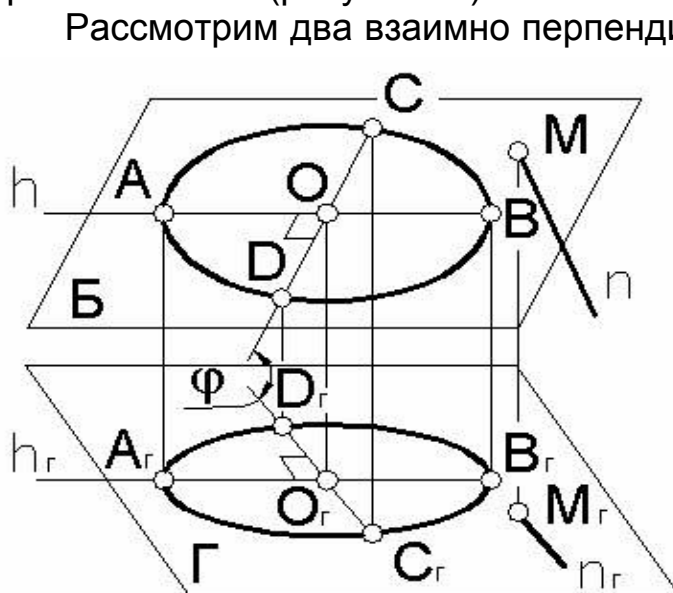


Рисунок 94

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных диаметра окружности:  $AB$  – являющегося линией уровня плоскости  $B$  и  $CD$  – совпадающего с линией наибольшего уклона плоскости  $B$  к плоскости  $\Gamma$ . Диаметр  $AB$  спроецируется на плоскость  $\Gamma$  без искажения в *большую ось* эллипса  $A_\Gamma B_\Gamma$  ( $AB = A_\Gamma B_\Gamma$ ), а диаметр  $CD$  – в *малую ось* эллипса  $C_\Gamma D_\Gamma$ . Если принять угол наклона плоскости  $B$  к плоскости  $\Gamma$  равным  $\varphi$ , то  $C_\Gamma D_\Gamma = CD \cos \varphi$ . Оси эллипса взаимно перпендикулярны,

поскольку являются проекциями перпендикулярных диаметров окружности, один из которых параллелен плоскости проекций.

Таким образом, ***большая ось эллипса, являющегося ортогональной проекцией окружности, лежащей в некоторой плоскости  $B$ , параллельна проекции прямой уровня этой плоскости и равна диаметру окружности, а малая ось – параллельна прямой наибольшего уклона плоскости  $B$  и равна диаметру окружности, помноженному на косинус угла наклона плоскости  $B$  к плоскости проекций.***

Можно дать и другой признак для определения направления осей эллипса. Если построить перпендикуляр  $n$  к плоскости  $B$  (рисунок 94), то он, будучи перпендикулярен ко всякой прямой этой плоскости, будет перпендикулярен и диаметру  $AB$  окружности. Не будем забывать, что диаметр  $AB$  является линией уровня (горизонталью)



плоскости Б. Поэтому ортогональная проекция нормали  $n$  на плоскость Г будет перпендикулярна проекции диаметра АВ на эту же плоскость (см. 3.2). То есть проекция нормали к плоскости Б параллельна малой оси эллипса.

Рассмотрим примеры построения проекций окружности на комплексном чертеже, основанные на вышеописанных свойствах ее ортогональной проекции.

**Пример 1.** Построить окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  лежащую во фронтально проецирующей плоскости Д (рисунок 95).

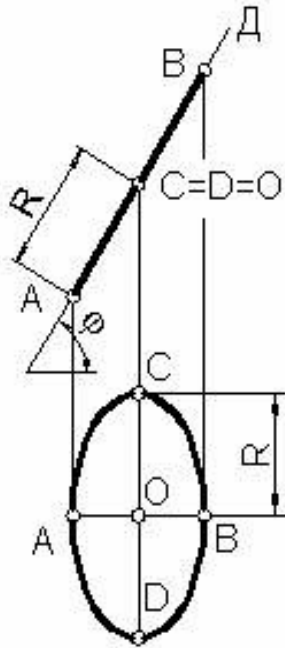


Рисунок 95

Фронтальной проекцией окружности будет в данном случае отрезок прямой длиной  $2R$ , а горизонтальной – эллипс. Учитывая рассмотренные свойства ортогональной проекции окружности, большая ось эллипса  $CD$  будет параллельна горизонтальной проекции горизонтали (в нашем примере – фронтально проецирующей прямой) плоскости Д и равна диаметру окружности  $2R$ . Малая ось эллипса  $AB$  будет параллельна горизонтальной проекции линии наибольшего уклона плоскости Д (в данном примере – фронтали). Величина малой оси эллипса определяется горизонтальными проекциями точек А и В. Ее можно определить и как описано выше:  $AB=2R \cos\varphi$ .

Зная положение и величины большой и малой осей эллипса, можно достроить любое число принадлежащих ему точек.

**Пример 2.** В плоскости общего положения  $E(hxf)$  построить окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  (рисунок 96).

Если задана, например, фронтальная проекция центра окружности  $O$ , то, «привязав» точку  $O$  к плоскости с помощью прямой  $O-1$  (горизонтали), легко находим ее горизонтальную проекцию. С направлением горизонтальной проекции горизонтали  $O-1$  совпадает большая ось эллипса  $AB=2R$ . Определив точки А и В на виде сверху (горизонтальной проекции), находим их и на виде спереди (фронтальной проекции).

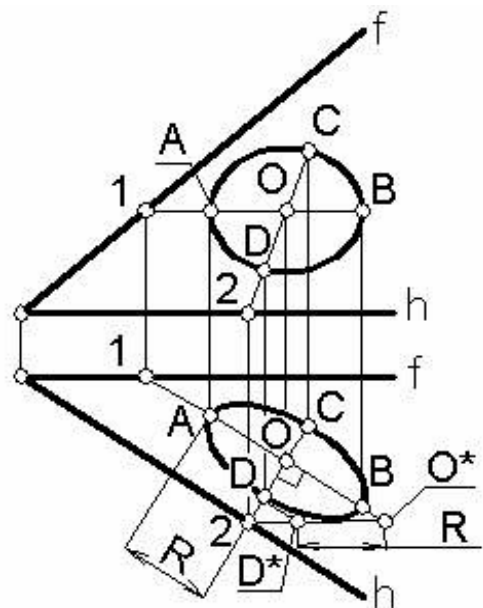


Рисунок 96

Малую ось эллипса  $CD$  найдем сначала на горизонтальной проекции линии наибольшего уклона  $O-2$ . Для этого определим натуральную величину отрезка  $O-2$  способом прямоугольного треугольника  $O-2-O^*$ . Если теперь на гипотенузе  $O^*-2$  отложить от точки  $O^*$  величину радиуса  $R$ , то при помощи точки  $D^*$  легко находится точка  $D$ , определяющая величину малой полуоси эллипса  $OD$ . Точка  $C$  симметрична точке  $D$  относительно центра  $O$ . В силу принадлежности линии наибольшего уклона  $O-2$ , точки  $C$  и  $D$  легко определяются на фронтальной проекции (виде спереди).

Дополнительные точки для уточненного построения эллипса можно определить, например, при помощи параллелограмма, построенного на осях  $AB$  и  $CD$ , как на его средних линиях.

### 5.1.3. Пространственные кривые

Пространственными называют такие кривые, точки которых не лежат в одной плоскости.

Как и у плоских кривых, у пространственных кривых могут быть особые точки. Но если особенности плоских кривых сохраняются при их проецировании, то у пространственных кривых дело обстоит иначе. На рисунке 97 показаны две проекции некоторой пространственной кривой  $AB$ . Каждая проекция имеет узловые точки, в то время как сама кривая таких точек не имеет. Поэтому о свойствах пространственной кривой следует судить не по одному виду (проекции), а по ее комплексному чертежу.

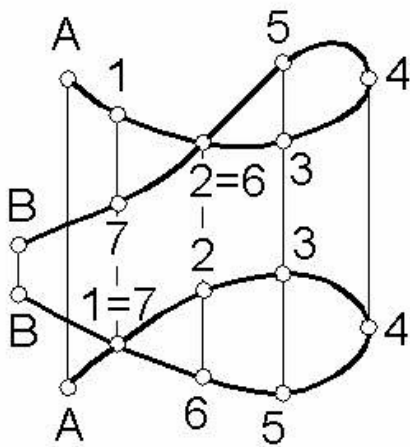


Рисунок 97

Так, например, прямая является касательной к пространственной кривой только тогда, когда обе проекции прямой являются касательными к соответствующим проекциям кривой в точках, являющихся проекциями точки данной кривой. В то время как для плоской кривой прямая, лежащая в одной с ней плоскости, будет касательной к ней, если хотя бы на одной проекции она касательна к проекции кривой.

Чаще других в практике встречается винтовая линия и ее частный случай цилиндрическая винтовая линия. В качестве примера можно привести резьбы и пружины. Поэтому рассмотрим эту линию более подробно.

Если некоторая точка  $A$  совершает сложное движение: равномерно перемещается по некоторой прямой, а прямая в свою очередь равномерно вращается вокруг параллельной ей оси, то точка  $A$  при этом опишет кривую, называемую *цилиндрической винтовой линией*.

Перемещение точки вдоль прямой за один полный оборот последней вокруг оси вращения называют *шагом* винтовой линии.

На рисунке 98 показано построение проекций винтовой линии, ось  $i$  которой перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций. В этом случае горизонтальная проекция линии (вид сверху) будет окружностью.

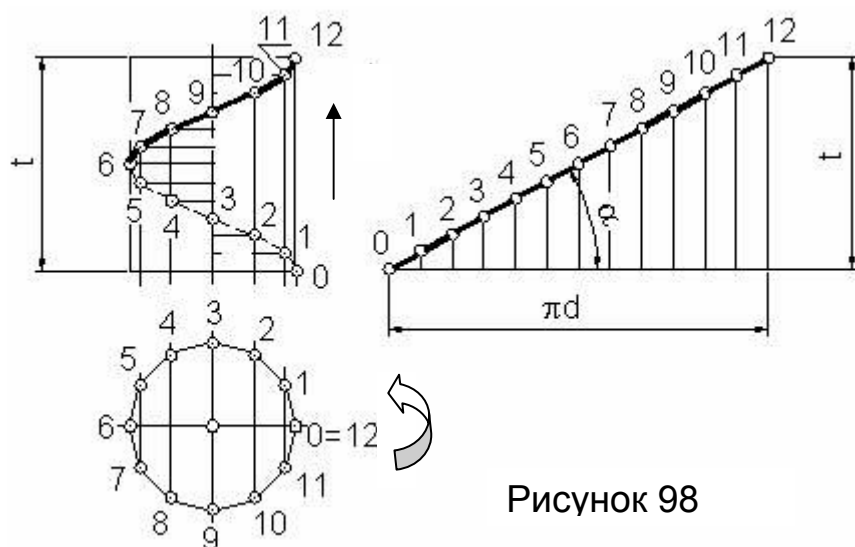


Рисунок 98

Для построения вида спереди (фронтальной проекции) проведем следующее: рассмотрим двенадцать положений точки за один полный оборот. Для этого разделим на двенадцать равных частей окружность и шаг винтовой линии.

Тогда в пересечении соответствующих вертикальных линий связи и горизонтальных прямых получим фронтальные проекции точек винтовой линии. Соединив точки плавной кривой, получим фронтальную проекцию винтовой линии, являющуюся *синусоидой* (это следует из способа ее построения).

Показанная на рисунке 98 винтовая линия называется *правой*, так как точка перемещается вправо (по часовой стрелке) при своем движении по поверхности кругового цилиндра. В противном случае винтовая линия является *левой*.

Если развернуть поверхность цилиндра вместе с винтовой линией, то ее точки лягут на одну прямую (это следует из самого способа построения). Угол  $\alpha$  называют *углом наклона* винтовой линии.

## 5.2. ОБРАЗОВАНИЕ, ЗАДАНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 5.2.1. Образование поверхностей

В начертательной геометрии (да и не только в ней) основным способом образования поверхностей является *кинематический способ*.

В этом случае *поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по какому либо закону*.

Сама линия при движении может оставаться неизменной или непрерывно меняться.

В общем случае поверхность может быть образована *направляющей  $m$* , перемещающейся по некоторым неподвижным *образующим  $t$*  (рисунок 99). Видно, что можно поменять местами образующие и направляющие, при этом получится одна и та же поверхность.

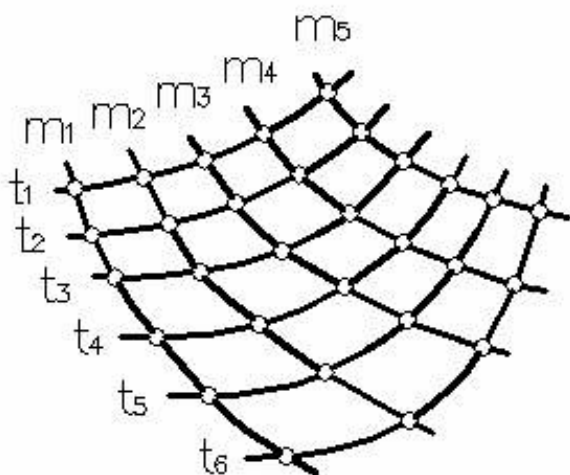


Рисунок 99

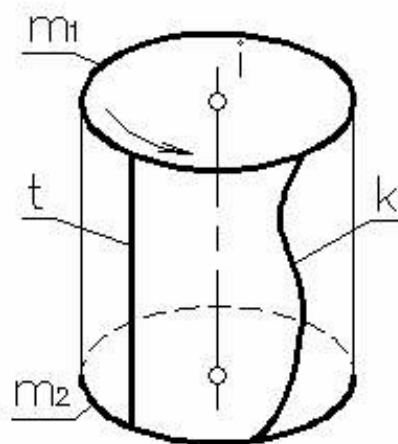


Рисунок 100

Каждая поверхность может быть образована разными способами. Так, например, поверхность прямого кругового цилиндра (рисунок 100) может быть образована так. Во-первых, вращением прямой образующей  $t$  вокруг параллельной ей оси  $i$ . Во-вторых, движением образующей окружности  $m$ , центр которой перемещается по оси цилиндра  $i$ , а плоскость окружности остается перпендикулярной этой оси. В-третьих, вращением около оси  $i$  образующей произвольной формы  $k$ , нанесенной на поверхность цилиндра.

Из всех возможных способов образования поверхности следует выбирать такие, которые являются наиболее простыми и удобными для изображения.

### 5.2.2. Задание поверхности на комплексном чертеже

Для задания поверхности на комплексном чертеже необходимо иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность таких элементов поверхности называют *определителем поверхности*. Часто поверхность задают проекциями ее направляющих и указывают способ построения ее образующих.

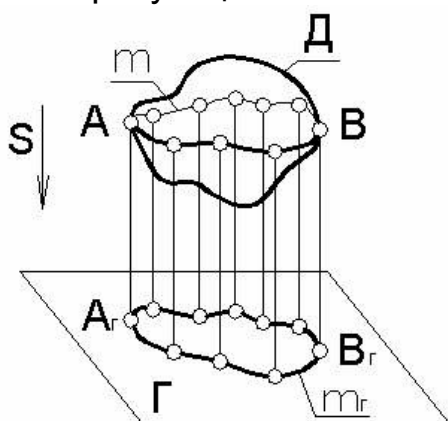


Рисунок 101

Для придания чертежу большей наглядности строят на нем еще и *очерк поверхности*, а так же ее наиболее важные линии и точки.

На рисунке 101 показано построение параллельной проекции поверхности общего вида Д на плоскость проекций Г. Проецирующие прямые, касающиеся поверхности Д, образуют цилиндрическую поверхность, а точки касания образуют некоторую линию *m*, называемую *контурной линией*.

**Очерком поверхности называют проекцию ее контурной линии.** Иными словами **очерк поверхности это граница, которая отделяет проекцию поверхности от остальной части плоскости проекций.**

### 5.2.3. Классификация поверхностей

Для удобства изучения поверхности можно условно разделить на ряд классов.

**Поверхности вращения** – образуются вращением произвольной образующей вокруг неподвижной оси.

**Линейчатые поверхности** – образуются движением прямой линии (в частности *винтовые поверхности*, образуемые движением прямой линии по винтовым направляющим).

**Поверхности второго порядка** (они пересекаются с плоскостью по кривой второго порядка, а максимальное число точек пересечения такой поверхности с прямой равно двум).

**Циклические поверхности** – образуются движением окружности.

**Топографические поверхности** – поверхности сложной формы, задаются на чертеже семейством линий (обычно линий уровня).

Нужно отметить, что классификация эта условная и некоторые поверхности могут быть отнесены не к одному, а сразу к нескольким классам.

### 5.3. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

**Поверхностью вращения называют поверхность, описываемую какой либо линией (образующей, в частности прямой) при ее вращении вокруг неподвижной оси.**

Образующая линия может быть как плоской, так и пространственной кривой. Поверхность вращения определяется заданием своей образующей  $m$  и оси вращения  $i$  (рисунок 102).

Каждая точка  $M$  образующей  $m$  при вращении описывает окружность с центром  $O$  на оси  $i$ . Эти окружности называют **параллелями**.

Наибольшая и наименьшая параллели называются соответственно **экватором** и **горлом**.

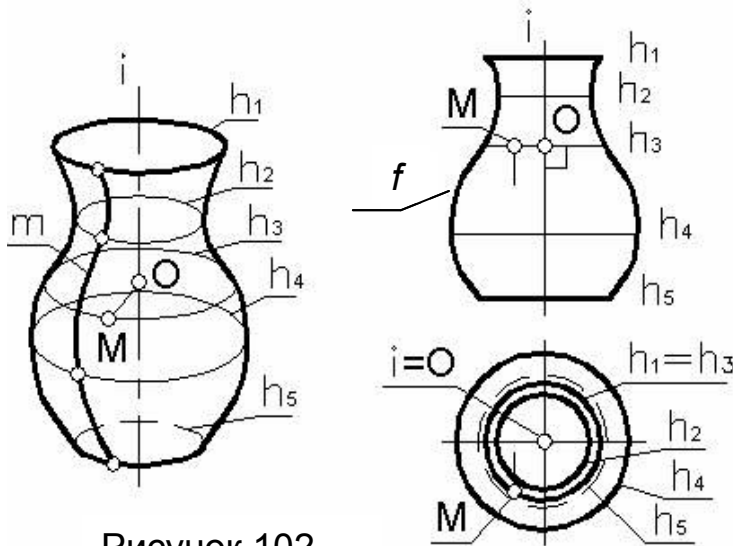


Рисунок 102

Линии поверхности вращения, плоскость которых проходит через ось вращения  $i$ , называют **меридианами**. Принимая во внимание способ образования поверхности ясно, что все меридианы равны между собой.

При изображении поверхности вращения на комплексном чертеже ее обычно располагают так, чтобы ось вращения

была перпендикулярна какой либо плоскости проекций (в нашем примере горизонтальной плоскости  $\Gamma$ ). В этом случае все параллели  $h$  проецируются на эту плоскость проекций без искажения, а экватор определяет горизонтальный очерк поверхности.

Меридиан  $f$ , расположенный во фронтальной плоскости, проецируется без искажения на фронтальную плоскость проекций  $\Phi$ . Этот меридиан называется **главным меридианом**. Он определяет фронтальный очерк поверхности. Построение любой точки этой поверхности удобно производить при помощи параллели  $h$ , проведенной на поверхности на уровне нужной точки.

### 5.3.1. Поверхности, образуемые вращением прямой линии

При вращении прямой линии могут быть образованы ниже перечисленные поверхности.

**Цилиндр вращения** образуется вращением прямой  $t$  вокруг параллельной ей оси  $i$  (рисунок 103).

**Конус вращения** образуется вращением прямой  $t$  вокруг пересекающейся с ней оси  $i$  (рисунок 104).

**Однополостный гиперболоид вращения** образуется вращением прямой  $t$  вокруг скрещивающейся с ней оси  $i$  (рисунок 105).

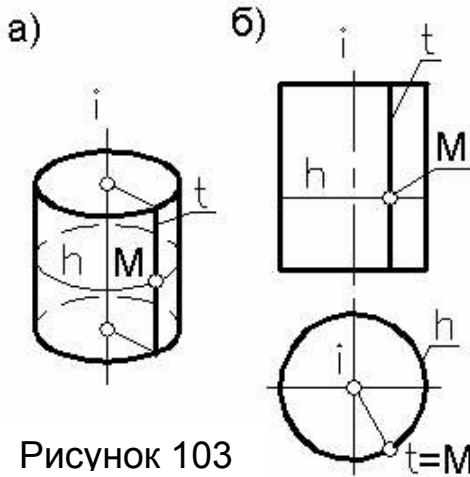


Рисунок 103

В этом случае все точки прямой опишут окружности различных радиусов, причем общий перпендикуляр  $OA$  прямых  $t$  и  $i$  будет наименьшим из всех радиусов, поэтому точка  $A$  опишет окружность, являющуюся горлом гиперболоида.

Для построения главного меридиана гиперболоида нужно повернуть вокруг оси  $i$  ряд точек прямой  $t$  до совмещения их с фронтальной плоскостью, проходящей через ось  $i$ . При этом получим гиперболу, являющуюся фронтальным очерком однополостного гиперболоида.

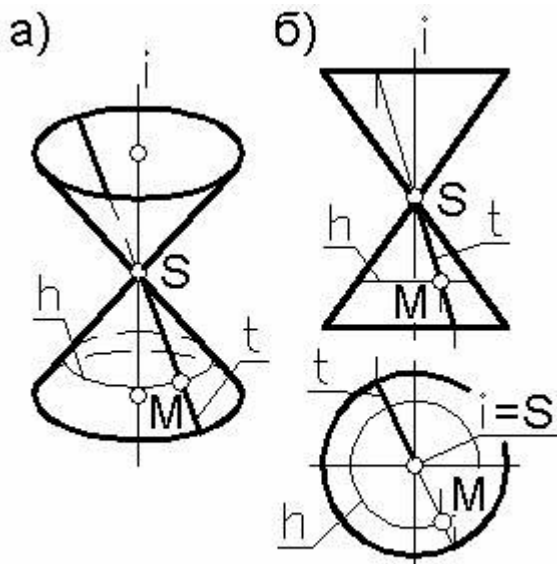


Рисунок 104

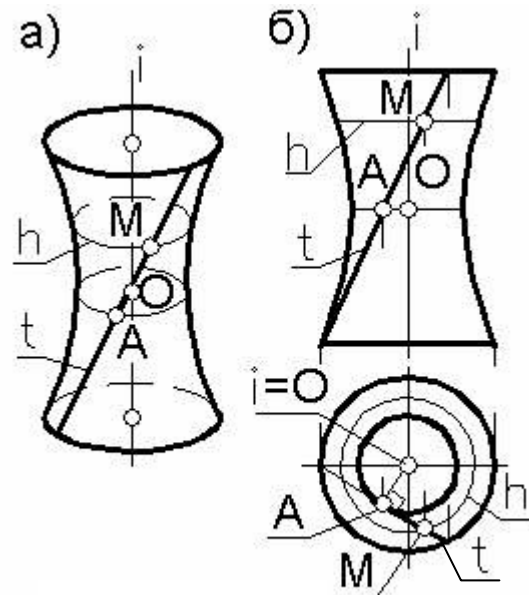


Рисунок 105

Поскольку все три поверхности образованы движением прямой линии, их можно отнести и к классу линейчатых поверхностей. В то же время эти поверхности являются поверхностями второго порядка, так как максимальное число точек пересечения каждой из них с прямой линией равно двум.

Построение некоторой точки  $M$  на любой из рассмотренных поверхностей вращения можно выполнить при помощи параллели  $h$  или прямолинейной образующей  $t$ .

### 5.3.2. Поверхности, образуемые вращением окружности

**Сфера** образуется вращением окружности вокруг ее диаметра.

**Тор** образуется вращением окружности вокруг оси  $i$ , лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр (рисунок 106). Такой тор называют **закрытым**. Если же ось вращения  $i$  проходит вне окружности, тор называют **открытым** или **кольцом** (рисунок 107).

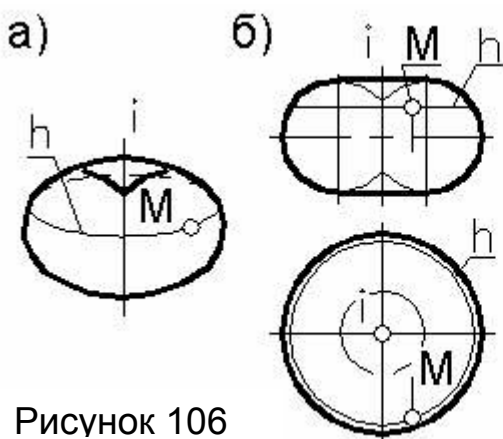


Рисунок 106

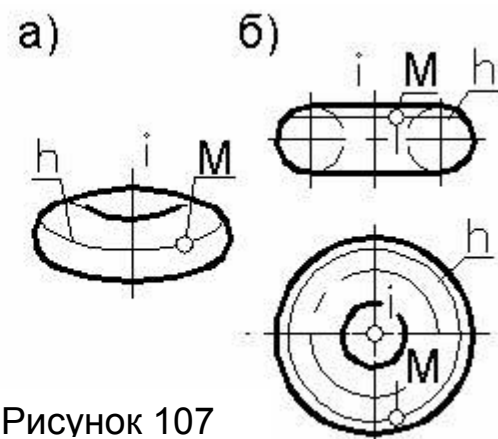


Рисунок 107

Сфера является поверхностью второго порядка, а тор – четвертого, что определяется максимальным числом точек пересечения этих поверхностей с прямой линией.

Построение произвольной точки  $M$  на поверхности сферы или тора производят с помощью параллелей  $h$ .

### 5.3.3. Поверхности, образуемые вращением кривых второго порядка

**Эллипсоид вращения** образуется вращением эллипса вокруг его оси  $i$  (рисунок 108).

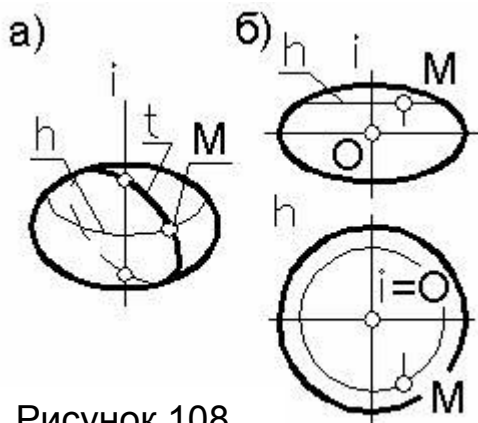


Рисунок 108

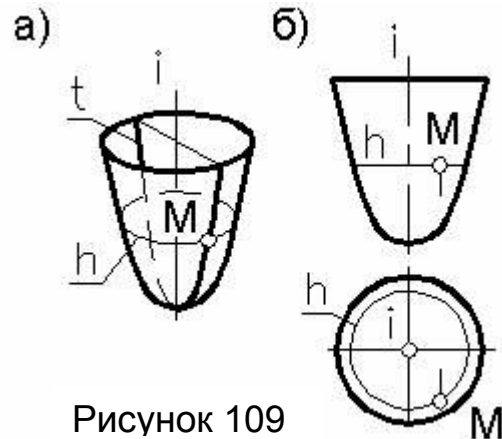


Рисунок 109



**Параболоид вращения** образуется вращением параболы  $t$  вокруг ее оси  $i$  (рисунок 109). Эта поверхность используется в качестве отражающей поверхности в прожекторах для получения параллельного пучка световых лучей.

**Однополостный гиперboloид вращения** образуется вращением гиперболы  $t$  вокруг ее мнимой оси  $i$  (рисунок 110). Здесь же показан *асимптотический конус вращения*, образованный вращением асимптот гиперболы. Однополостный гиперboloид находится во внешней части этого конуса.

Ранее было показано, что однополостный гиперboloид вращения является и линейчатой поверхностью, т.е. может быть образован вращением прямой линии вокруг скрещивающейся с ней оси (см. рисунок 105).

**Двуполостный гиперboloид вращения** образуется вращением гиперболы  $t$  вокруг ее действительной оси  $i$  (рисунок 111). Двуполостный гиперboloид находится во внутренней части асимптотического конуса.

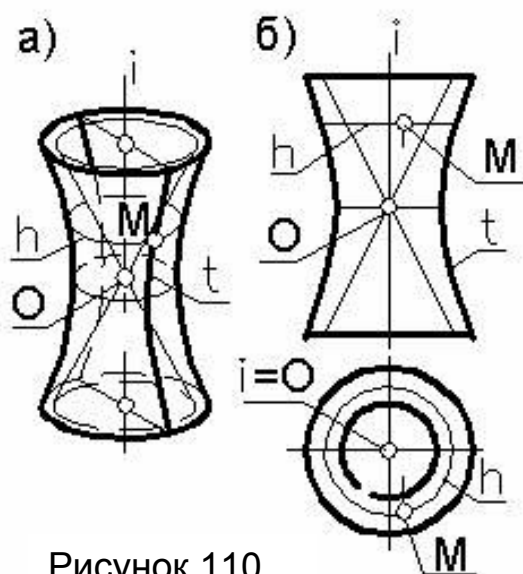


Рисунок 110

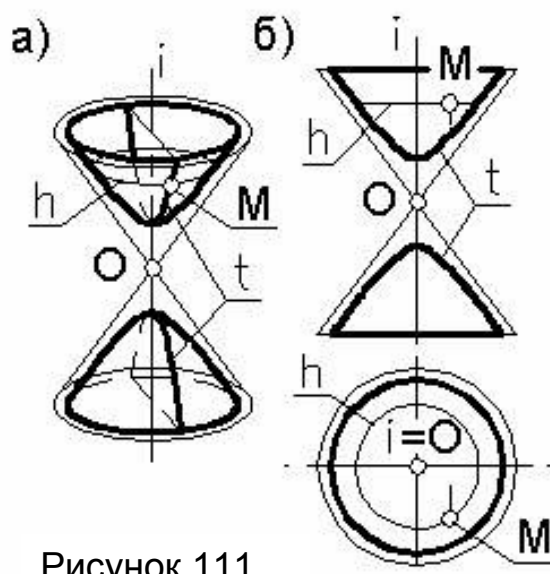


Рисунок 111

Все четыре рассмотренные выше поверхности являются и поверхностями второго порядка.

Построение некоторой точки  $M$  на каждой из этих поверхностей производится при помощи их параллелей  $h$  (см. рисунки 108-111).

## 5.4. ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

**«Линейчатой» называется поверхность, которая описывается какой либо прямой (образующей) при ее движении в пространстве по какому-нибудь закону.**

В общем случае линейчатая поверхность может быть получена движением прямой линии по *трем направляющим* (рисунок 112).

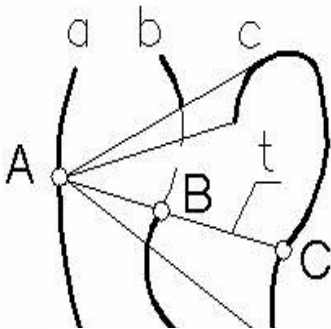


Рисунок 112

Помимо этого существуют и другие способы, определяющие закон движения прямолинейной образующей, описывающей линейчатую поверхность. Так линейчатую поверхность можно получить имея лишь одну направляющую линию  $m$ , если прямолинейная образующая  $t$ , двигаясь по ней, будет проходить через неподвижную точку (рисунок 113) или будет оставаться параллельной сама себе (рисунок 114). Линейчатая поверхность получится и при движении прямолинейной образующей по двум направляющим при сохранении определенного положения образующей относительно некоторой неподвижной плоскости (параллельность или постоянный наклон к ней).

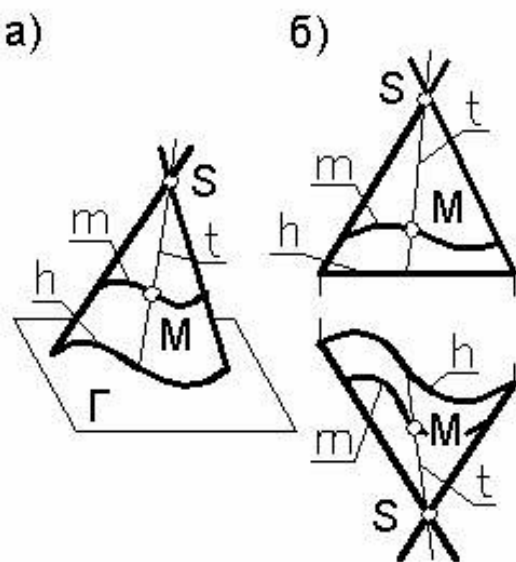


Рисунок 113

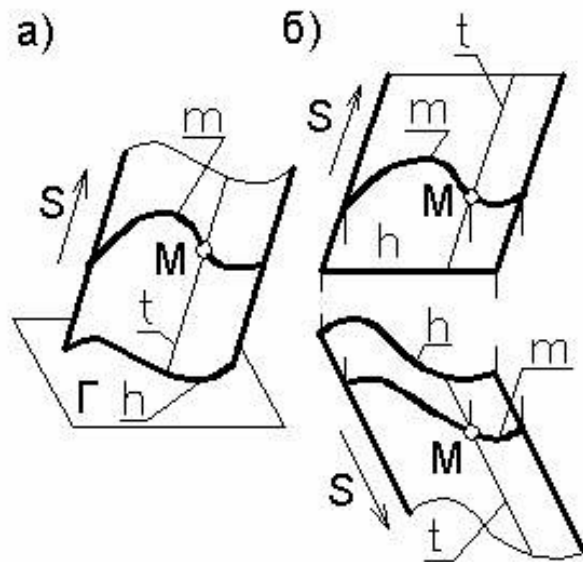


Рисунок 114

Построение какой-либо точки  $M$  на линейчатой поверхности производят при помощи ее прямолинейной образующей  $t$ , проходящей через эту точку.

### 5.4.1. Линейчатые поверхности с одной направляющей

В зависимости от вида направляющих и характера движения образующей получаются различные типы линейчатых поверхностей.

**Коническая поверхность** образуется движением прямой линии  $t$  по некоторой кривой направляющей  $m$  и проходящей через неподвижную точку  $S$  (вершину) (см. рисунок 113).

**Цилиндрическая поверхность** образуется движением прямой линии  $t$  по некоторой кривой направляющей  $m$  и имеющей постоянное направление  $s$  (см. рисунок 114).

Если направляющей является ломаная линия, то получим частные случаи конической и цилиндрической поверхностей – **пирамидальную и призматическую поверхности**.

Обычно в качестве направляющей выбирается какая-нибудь линия уровня, например горизонталь  $h$ . А для увеличения наглядности изображения на комплексном чертеже помимо направляющих и вершины  $S$  или направления  $s$ , дополнительно строят очерки этих поверхностей. На рисунке 115 показано построение горизонтального и фронтального очерков конической и цилиндрической поверхностей. Точками 1 и 2 обозначены концы очерковых образующих на горизонтальных проекциях, а точками 3 и 4 концы очерковых образующих на фронтальных проекциях. Этими очерковыми образующими определяются области на плоскостях проекций, внутри которых могут находиться точки данных поверхностей. Кроме этого очерковые образующие разграничивают проекции поверхностей на **видимую** и **невидимую** части.

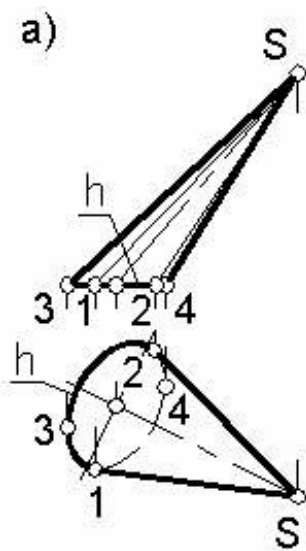


Рисунок 115

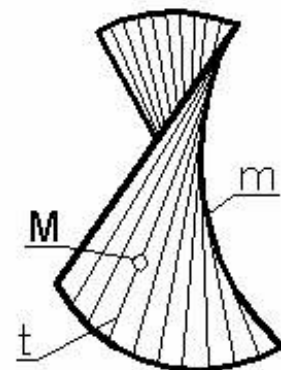
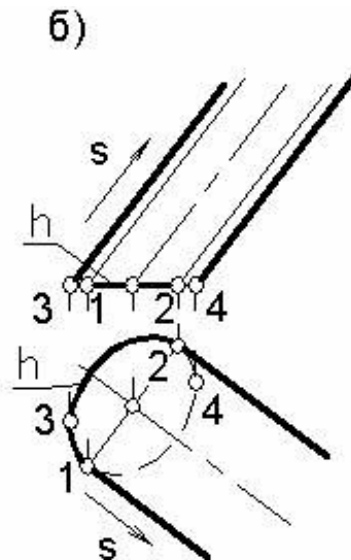


Рисунок 116

Если направляющей  $m$  конической или цилиндрической поверхностей является кривая второго порядка, то и поверхность получится – второго порядка.

**Торс** образуется движением прямолинейной образующей  $t$ , касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной направляющей  $m$ , называемой **ребром возврата** (рисунок 116).

Все рассмотренные выше поверхности относятся к числу **развертывающихся поверхностей**. Все другие кривые линейчатые поверхности, о которых речь пойдет ниже, относятся к классу **не развертывающихся**; их называют так же **косыми**.

#### 5.4.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими

Рассмотрим некоторые из линейчатых поверхностей с двумя направляющими, у которых все образующие параллельны неподвижной плоскости, называемой **плоскостью параллелизма**.

**Цилиндроид** образуется движением прямолинейной образующей  $t$  по двум криволинейным направляющим  $a$  и  $b$ , причем во всех своих положениях образующая  $t$  параллельна некоторой плоскости параллелизма Б (рисунок 117).

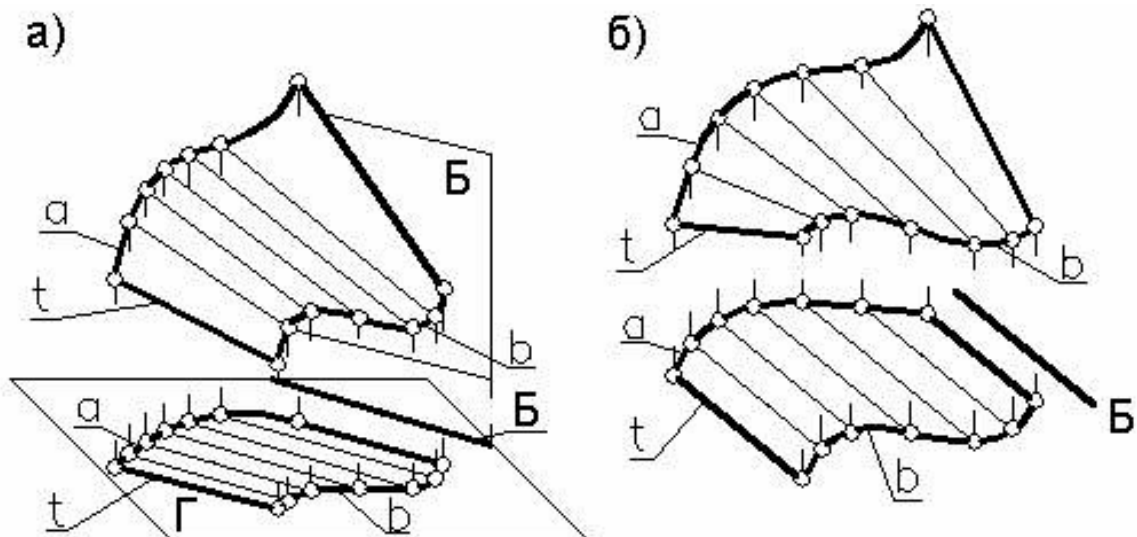


Рисунок 117

Для построения образующих на чертеже проводят ряд плоскостей, параллельных плоскости параллелизма и определяют точки их пересечения с обеими направляющими  $a$  и  $b$ . Плоскость Б в данном случае является горизонтально проецирующей. Обычно же для удобства построения образующих за плоскость параллелизма принимают одну из плоскостей проекций. В этом случае все образующие будут линиями уровня.

**Коноид** образуется движением прямолинейной образующей  $t$

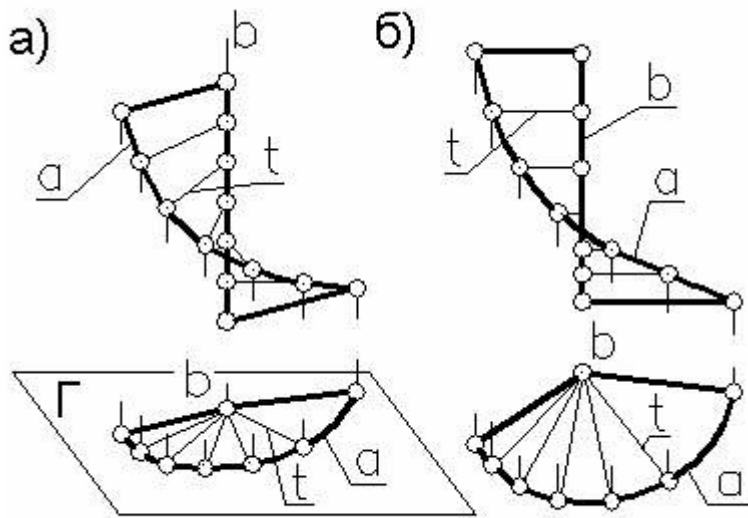


Рисунок 118

по двум направляющим, одна из которых является кривой линией  $a$ , а другая – прямой  $b$ , при этом во всех своих положениях образующая параллельна некоторой плоскости параллелизма (рисунок 118).

Если у коноида прямолинейная направляющая  $b$  перпендикулярна плоскости параллелизма, то коноид называется *прямым*.

**Косая плоскость** образуется движением прямолинейной образующей  $t$  по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим  $a$  и  $b$ , причем во всех своих положениях образующая  $t$  параллельна некоторой плоскости параллелизма (рисунок 119). На нашем рисунке плоскостью параллелизма является горизонтальная плоскость  $\Gamma$ , а образующие  $t$  этой косой плоскости являются горизонталями.

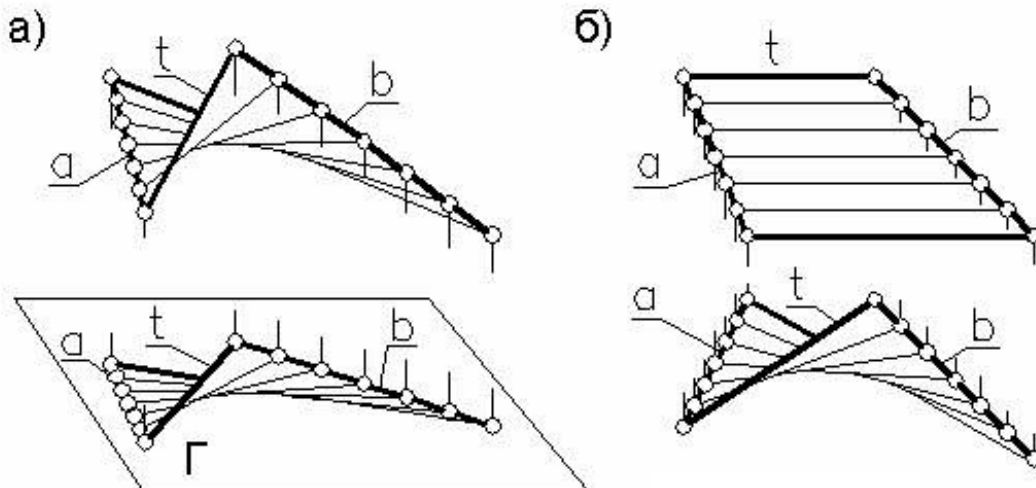


Рисунок 119

Нужно отметить, что одну и ту же косую плоскость можно получить, если в качестве направляющих взять две любые образующие косой плоскости, а за плоскость параллелизма – плоскость параллельную направляющим  $a$  и  $b$ .

Поскольку в сечении косой плоскости можно получить помимо ее прямолинейных образующих, параболу и гиперболу, то эту по-

верхность называют так же *гиперболический параболоид*.

Косая плоскость является поверхностью второго порядка.

### 5.4.3. Линейчатая поверхность с тремя прямолинейными направляющими

Такую поверхность называют **однополостным гиперболоидом**. Частный случай этой поверхности – однополостный гиперболоид вращения – был рассмотрен в 30.1 и 30.3 (см. рисунки 105 и 110).

Алгоритм построения какой-нибудь образующей  $t$  однополостного гиперболоида, заданного тремя прямолинейными направляющими  $a$ ,  $b$  и  $c$  (скрещивающимися и не параллельными одной плоскости), следующий.

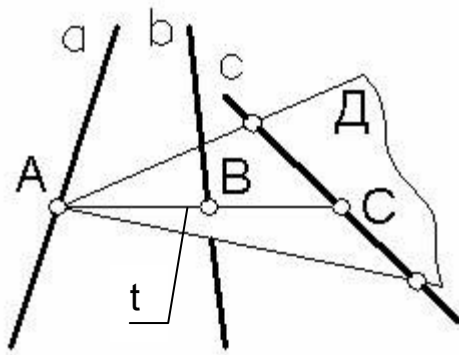


Рисунок 120

Выберем на направляющей  $a$  (рисунок 120) произвольную точку  $A$ . Затем через точку  $A$  и направляющую  $c$  проведем вспомогательную плоскость  $D$ . Найдем точку пересечения плоскости  $D$  с направляющей  $b$  – точку  $B$ . Точки  $A$  и  $B$  определяют образующую  $t$ . Эта образующая пересечет и направляющую  $c$  в точке  $C$ , так как лежит в плоскости  $D$ , проходящей через направляющую  $c$ .

Однополостный гиперболоид общего вида является поверхностью второго порядка.

## 5.5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Поверхность второго порядка** определяется как поверхность, пересекающаяся с произвольной плоскостью по кривой второго порядка, либо как поверхность, пересекающаяся с произвольной прямой в двух точках. При этом имеется в виду, что прямая не принадлежит поверхности.

Поскольку поверхности второго порядка широко применяются в технике, перечислим их, включая и те, которые были рассмотрены как поверхности вращения или как линейчатые поверхности.

**Коническая поверхность второго порядка** включает следующие виды: конус вращения (см. рисунок 104) и эллиптический конус, который может быть получен деформацией параллелей конуса вращения в эллипсы.

**Цилиндрическая поверхность второго порядка** включает виды: цилиндр вращения (см. рисунок 103), эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры. Эллиптический цилиндр

может быть получен из цилиндра вращения деформацией его параллелей в эллипсы.

**Эллипсоид** включает виды: эллипсоид вращения (см. рисунок 108), сфера и трехосный эллипсоид, который можно получить деформацией параллелей эллипсоида вращения в эллипсы.

**Параболоид** включает виды: параболоид вращения (см. рисунок 109), эллиптический и гиперболический параболоиды. Эллиптический параболоид можно получить из параболоида вращения деформацией его параллелей в эллипсы. Гиперболический параболоид (см. рисунок 119) является так же линейчатой поверхностью.

**Однополостный гиперболоид** включает виды: однополостный гиперболоид вращения (см. рисунок 110) и однополостный эллиптический гиперболоид, который можно получить из гиперболоида вращения деформацией параллелей в эллипсы либо движением прямолинейной образующей по трем прямолинейным направляющим (см. пункт 30.3).

**Двуполостный гиперболоид** включает виды: двуполостный гиперболоид вращения (см. рисунок 111) и двуполостный эллиптический гиперболоид, который может быть получен из гиперболоида вращения деформацией его параллелей в эллипсы.

Нужно отметить, что все поверхности второго порядка (за исключением параболического и гиперболического цилиндров, а также гиперболического параболоида) могут пересекаться плоскостью по окружности.

## 5.6. ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

**«Винтовой» называется поверхность, описываемая некоторой линией (образующей) при ее винтовом движении.**

Если образующей является прямая линия, то поверхность называется **линейчатой винтовой поверхностью** или **геликоидом**. В зависимости от того, перпендикулярна или наклонна образующая к оси геликоида, его называют **прямым** или **наклонным**.

**Прямой геликоид** образуется движением прямолинейной образующей  $t$  по двум направляющим, одна из которых – цилиндрическая винтовая линия  $m$ , другая – ось винтовой поверхности  $i$ . При этом во всех своих положениях образующая  $t$  параллельна плоскости параллелизма, перпендикулярной оси  $i$ . В качестве плоскости параллелизма обычно принимается одна из плоскостей проекций (рисунок 121). У прямого геликоида образующая  $t$  расположена под прямым углом к оси  $i$ .

Прямой геликоид можно отнести к числу коноидов и назвать **винтовым коноидом**.

**Наклонный геликоид** отличается от прямого геликоида тем, что угол между образующей  $t$  и осью  $i$  отличен от прямого.

Образующая  $t$  наклонного геликоида при своем движении скользит по двум направляющим, одна из которых – цилиндрическая винтовая линия  $m$ , а другая – ее ось  $i$ . При этом во всех своих положениях образующая  $t$  параллельна образующим некоторого конуса вращения. Он называется **направляющим конусом** наклонного геликоида.

На рисунке 122 показано построение проекций наклонного геликоида. Образующие геликоида параллельны соответствующим образующим направляющего конуса.

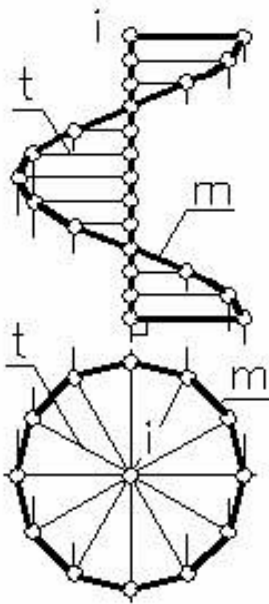


Рисунок 121

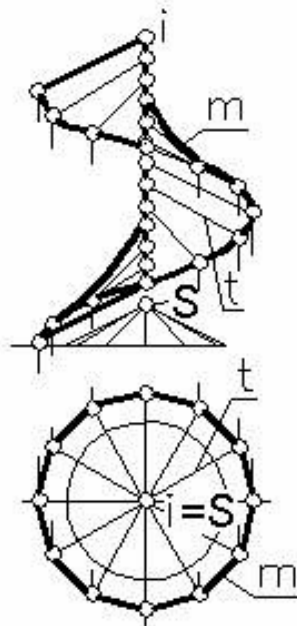


Рисунок 122

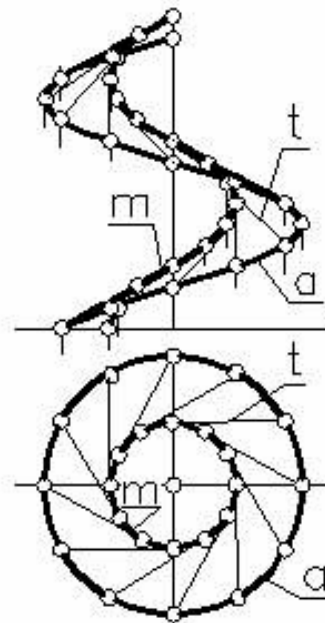


Рисунок 123

**Развертывающийся геликоид** образуется движением прямой образующей  $t$ , касающейся во всех своих положениях цилиндрической винтовой линии  $m$ , являющейся ребром возврата геликоида (рисунок 123). Линия  $\alpha$  (от пересечения геликоида и поверхности соосного с ним цилиндра) ограничивает поверхность геликоида. Развертывающийся геликоид (как линейчатая поверхность с ребром возврата) относится к числу торсов.

Винтовые поверхности широко применяются в технике. Это крепежные изделия (болты, винты, гайки и т.д.), ходовые винты и винтовые домкраты, червячные передачи, сверла и винтовые транспортеры (шнеки) и многое другое.



## 5.7. ЦИКЛИЧЕСКИЕ И ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

### 5.7.1. Циклические поверхности

**«Циклической»** называется поверхность, которая описывается окружностью (образующей) постоянного или переменного радиуса при ее произвольном движении.

Из рассмотренных ранее поверхностей к циклическим можно отнести, во-первых, поверхности вращения, поскольку они могут быть образованы движением окружности (параллели), центр которой перемещается вдоль оси вращения, а плоскость окружности перпендикулярна к оси. Во-вторых, к циклическим поверхностям можно отнести те из поверхностей второго порядка, которые имеют круговые сечения (пересекаются плоскостью по окружности).

В-третьих, к циклическим можно отнести **каналовые** и **трубчатые поверхности**.

**Каналовая поверхность** образуется движением окружности переменного радиуса. При этом центр окружности  $O$  перемещается по заданной кривой  $t$  (направляющей), а ее плоскость остается перпендикулярной к этой кривой (рисунок 124а).

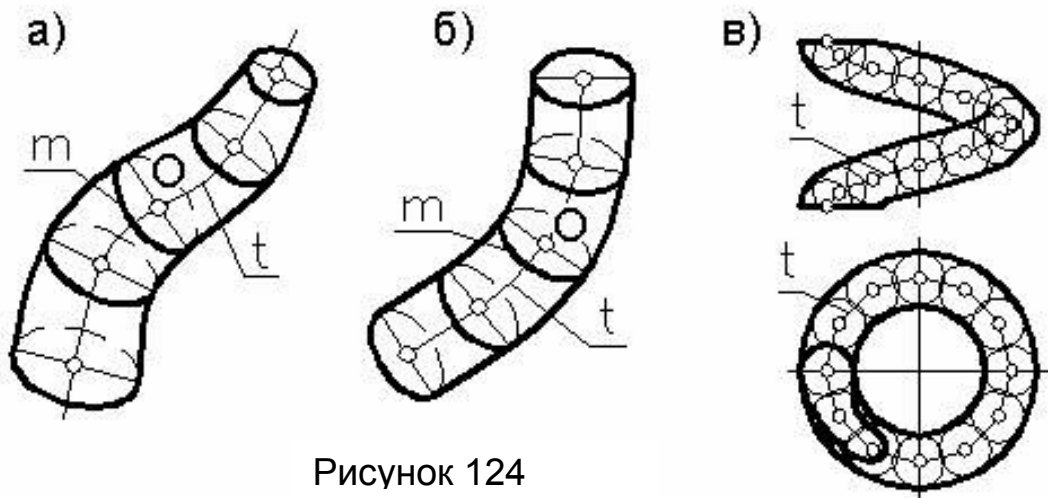


Рисунок 124

**Трубчатая поверхность** отличается от каналовой тем, что ее образующая окружность  $m$  имеет постоянный радиус (рисунок 124б).

Если направляющая  $t$  трубчатой поверхности является цилиндрической винтовой линией, то образуется **трубчатая винтовая поверхность** (рисунок 124в). Эта поверхность может быть получена и движением сферы постоянного диаметра по цилиндрической винтовой линии. Примером такой поверхности является цилиндрическая винтовая пружина.

### 5.7.2. Топографические поверхности

**«Топографической» называют поверхность, образование которой не подчинено какому-либо геометрическому закону.**

К таким поверхностям относятся поверхности земной коры, обшивки самолета, корпуса судна и многие другие.

На чертеже такие поверхности изображают при помощи вспомогательных линий. Так на географических картах земная поверхность изображается при помощи семейства горизонталей (рисунок 125а). Поверхность обшивки самолета, корпуса судна и другие – при помощи линий уровня (горизонталей, фронталей и профильных) с их согласованием и привязкой.

Эти поверхности часто называют **каркасными**, поскольку совокупность задающих их линий образует каркас поверхности.

На рисунке 125б показан теоретический чертеж поверхности фюзеляжа самолета. На этом чертеже показаны три семейства линий данной поверхности – горизонтали, фронталы и профильные

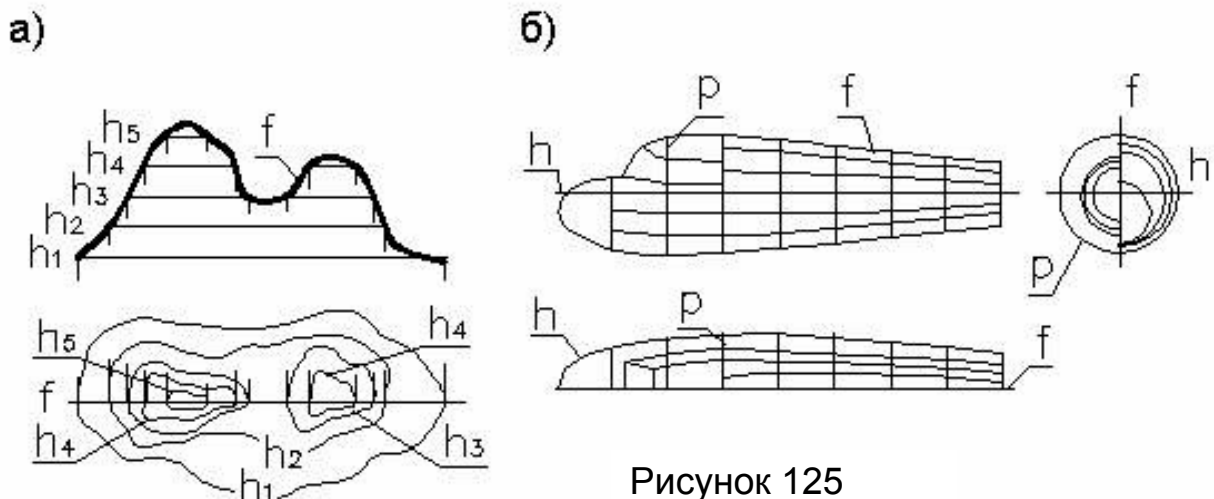


Рисунок 125

линии. Чтобы излишне не «засорять» чертеж линиями на нем не изображены фронтальные проекции горизонталей и горизонтальные проекции фронталей.

## ГЛАВА 6

### ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ. ПЛОСКОСТИ КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТИ

---

#### 6.1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Линия пересечения кривой поверхности с плоскостью представляет собой плоскую кривую. Обычно построение этой линии производят по ее отдельным точкам.

Основным способом построения точек линии пересечения поверхности с плоскостью является способ **вспомогательных секущих проецирующих плоскостей**. При этом вводится несколько вспомогательных проецирующих плоскостей, пересекающих данную поверхность по некоторым линиям, а данную секущую плоскость – по прямым линиям. Точки пересечения этих линий с соответствующими прямыми, являясь общими для данных поверхности и плоскости, будут точками линии их пересечения.

При выборе положения вспомогательных секущих плоскостей руководствуются простотой построения линий пересечения этих плоскостей с данной поверхностью. Поэтому эти линии должны быть **графически простыми** линиями, т.е. прямыми и окружностями. В случае, если это будут окружности, поверхность должна быть так расположена относительно плоскостей проекций, чтобы эти окружности не искажались ни на одной из них.

Указанный способ можно трактовать и как способ **конкурирующих линий** (который применялся нами ранее при решении позиционных задач с прямыми, плоскостями и многогранниками), поскольку линии пересечения каждой из вспомогательных секущих плоскостей с данной поверхностью и плоскостью являются конкурирующими линиями.

Итак, **для построения точек линии пересечения поверхности с данной плоскостью общего положения необходимо рассечь их вспомогательной проецирующей плоскостью по графически простым линиям данной поверхности. При этом точки пересечения графически простых линий поверхности и прямых от пересечения плоскостей будут точками искомой линии пересечения.**

При построении линии пересечения поверхности с секущей плоскостью общего положения полезно предварительное преобразование чертежа с целью превращения плоскости в проецирующую.

Поскольку, *если секущая плоскость является проецирующей, то точки линии пересечения ее с поверхностью определяются сразу в пересечении этой плоскости с графически простыми линиями поверхности.*

Среди всех точек линии пересечения можно выделить **опорные** и **случайные** точки. К числу опорных точек относятся **экстремальные точки** и **точки видимости**.

Экстремальными являются *высшая* и *низшая* точки линии сечения, а также *ближняя*, *дальняя*, *левая* и *правая* точки (по отношению к наблюдателю).

Точки видимости разграничивают линию пересечения поверхности с секущей плоскостью на видимую и невидимую части. Это точки, которые расположены на контурной линии поверхности, а их проекции лежат на соответствующем очерке поверхности. Для построения точек видимости можно рекомендовать следующий прием: **на секущей плоскости построить линию, конкурирующую с контурной линией поверхности; точки пересечения этих линий будут точками видимости линии пересечения поверхности с плоскостью.**

Все случайные точки можно найти способом рассмотренным ранее. В тоже время для нахождения опорных точек каждый раз приходится искать свой прием построения.

Выбор графически простых линий поверхности (прямая или окружность) зависит от того, к какому классу эта поверхность относится. Для поверхностей вращения это будут параллели (окружности), для линейчатых поверхностей – образующие (прямые линии), у поверхностей второго порядка - их прямолинейные образующие (для конуса, цилиндра, однополостного гиперболоида, косої плоскости) или их круговые сечения (для конуса, эллиптического конуса, эллипсоида, параболоида, однополостного и двух полостного гиперболоидов), у циклических поверхностей – образующие (окружности), у топографических поверхностей – линии, которыми они заданы.

## 6.2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ

**Пример 1.** Построить линию пересечения поверхности вращения с фронтально проецирующей (наклонной) плоскостью Б и определить натуральный вид сечения (рисунок 126).

Сначала строим опорные точки. На главном меридиане поверхности *f* отмечаем низшую точку А и высшую точку В. На экваторе *hз* отмечаем точки 5 и 6, которые являются точками видимости для вида сверху (горизонтальной проекции) линии пересечения.

Для построения случайных точек проводим на поверхности вращения графически простые линии. В данном случае это параллели, являющиеся окружностями. Отмечаем на параллелях точки, принадлежащие секущей плоскости Б (точки 1,2,3 и 4). Например на рисунке 126 на поверхности вращения проведена параллель  $h_1$ . Эта параллель является окружностью радиуса  $R$ ; на ней отмечены точки 1 и 2, принадлежащие плоскости Б.

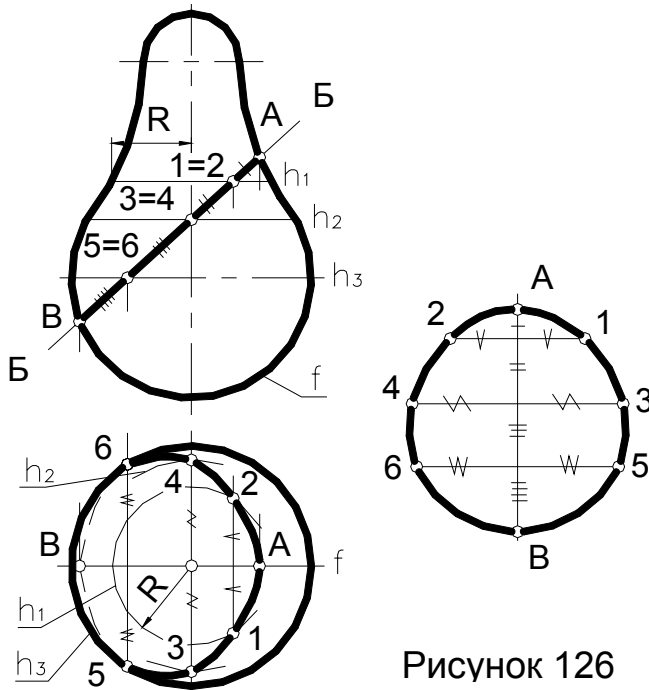


Рисунок 126

Точки 3 и 4, найденные при помощи параллели  $h_2$ , являются точками видимости для профильной проекции (вида слева), так как лежат на профильном меридиане поверхности.

Натуральный вид сечения проще всего построить при помощи непосредственного измерения высот и широт точек линии сечения. При этом высоты точек измеряют на виде спереди (фронтальной проекции) вдоль линии наибольшего уклона плоскости, которая в

данном случае будет являться фронталью, а широты - на виде сверху (горизонтальной проекции). Одинаковые размеры обозначены одинаковыми знаками.

**Пример 2.** Построить линию пересечения поверхности вращения с плоскостью общего положения  $D(\alpha x b)$  и натуральный вид сечения (рисунок 127).

Опять сначала строим опорные точки. Точки видимости А и В для горизонтальной проекции находим на пересечении горизонтали  $h_1$  плоскости Д и конкурирующего с ней на виде спереди (фронтальной проекции) экватора данной поверхности  $h_2$ .

Точки видимости С и D для фронтальной проекции (вида спереди) определяются на пересечении фронтали  $f_1$  плоскости Д и конкурирующим с ней главным меридианом поверхности  $f_2$ .

На пересечении фронтали  $f_1$  с ось поверхности вращения  $i$  находим точку 5 – точку пересечения этой оси с плоскостью Д.

Для нахождения высшей и низшей точек линии пересечения проведем в плоскости Д через ее точку 5 прямую наибольшего уклона  $u$  плоскости Д к горизонтальной плоскости проекций. Точки пе-

ресека Е и F этой прямой с поверхностью и будут указанными экстремальными точками. Для построения проекций этих точек по-

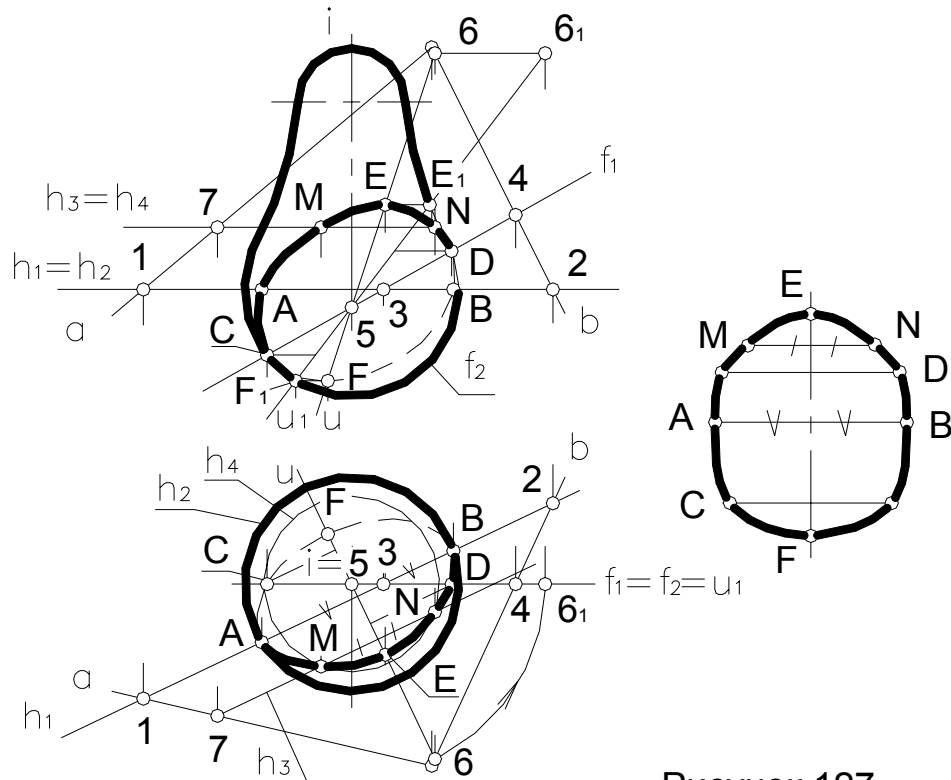


Рисунок 127

вернем прямую наибольшего уклона  $u$  вокруг оси поверхности вращения  $i$  до фронтального положения  $u_1$ . При этом точка 5 будет неподвижной, а точка 6 повернется до положения  $6_1$ . Прямая  $u$  в своем новом положении  $u_1$  будет лежать в одной плоскости с главным меридианом поверхности  $f_2$  (и конкурировать с ним), поэтому точки их пересечения  $E_1$  и  $F_1$  определяют экстремальные точки в повернутом положении. После обратного поворота получим высшую точку  $E$  и низшую точку  $F$ .

Построение случайных точек линии пересечения производится при помощи горизонталей плоскости  $D$  и параллелей поверхности  $h_3$  и  $h_4$ , которые появляются в результате пересечения поверхности и плоскости горизонтальной плоскостью  $\Gamma_1$ . Пересечение указанных горизонталей определяет случайные точки  $M$  и  $N$ .

Натуральный вид сечения строим при помощи высот и широт точек линии сечения. При этом высоты точек измеряем на фронтальной проекции  $u_1$ , повернутой до фронтального положения прямой наибольшего уклона  $u$  плоскости  $D$ , а широту – на горизонтальных проекциях горизонталей этой плоскости.

### 6.2.1. Особые случаи пересечения поверхности с плоскостью

Довольно часто при пересечении поверхности с плоскостью заранее известен вид искомой кривой. В этом случае линия пересечения может быть построена при помощи основных элементов, определяющих эту кривую. Так, например, сфера пересекается плоскостью всегда по окружности. Цилиндр вращения пересекается плоскостью, в общем случае, по эллипсу. Если же секущая плоскость параллельна или перпендикулярна оси цилиндра, то в сечении получится соответственно пара параллельных прямых или окружность (рисунок 128а).

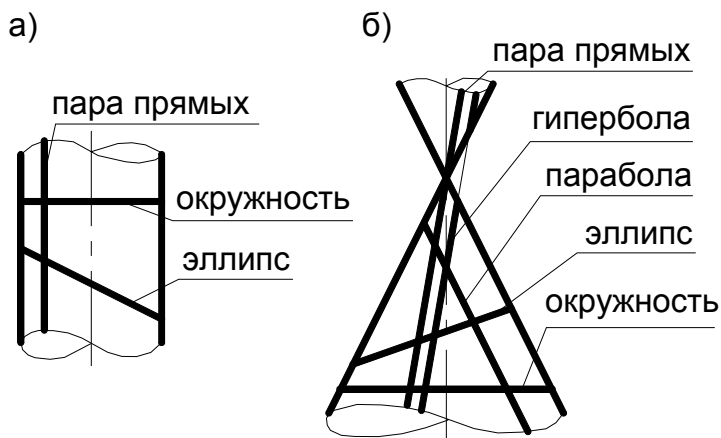


Рисунок 128

При пересечении конуса вращения с плоскостью могут получиться все виды кривых второго порядка (конические сечения). Так, если секущая плоскость пересекает все образующие конуса, то в сечении получается эллипс (рисунок 128б), а если плоскость перпендикулярна оси

конуса - получается окружность. Если секущая плоскость параллельна только одной образующей конуса – в сечении получается парабола. Если же секущая плоскость параллельна двум образующим, то в сечении получается гипербола. Если плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении получается пара прямых пересекающихся в точке вершины конуса.

***В тех случаях, когда линия пересечения поверхности с плоскостью представляет собой окружность, эллипс или пару прямых, можно избежать построения линии пересечения по точкам, построив эти линии по их основным элементам.***

Покажем на примерах построение таких сечений.

**Пример 3.** Построить проекции и натуральный вид сечения сферы наклонной плоскостью Б (рисунок 129).

Поскольку сфера всегда пересекается плоскостью по окружности, а в данном случае плоскость является фронтально проецирующей, то фронтальная проекция окружности будет отрезком АВ прямой линии, в которую «вырождается» на виде спереди секущая плоскость Б. Горизонтальная проекция окружности будет эллипсом. Центр О окружности сечения определяется легко, так как фронталь-

ная проекция его находится посередине отрезка АВ. При этом на виде спереди (фронтальной проекции) отрезок АВ равен натуральной величине диаметра окружности  $d$ .

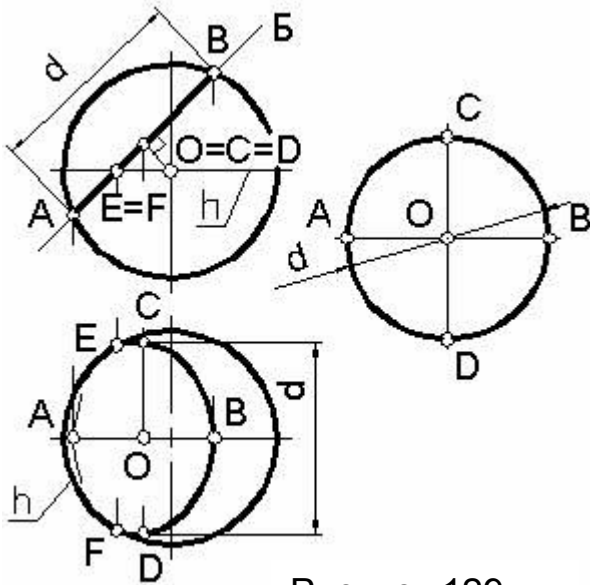


Рисунок 129

Эллипс, являющийся горизонтальной проекцией сечения, определяется своими осями АВ и СD. Ось CD равна диаметру  $d$  окружности сечения, поскольку диаметр CD является отрезком фронтально проецирующей прямой и не искажается на горизонтальной проекции. Зная величины осей эллипса, можно вычертить его любым известным способом.

Для завершения чертежа необходимо построить точки видимости Е и F, которые находятся на пересечении секущей плоскости Б с экватором  $h$  сферы.

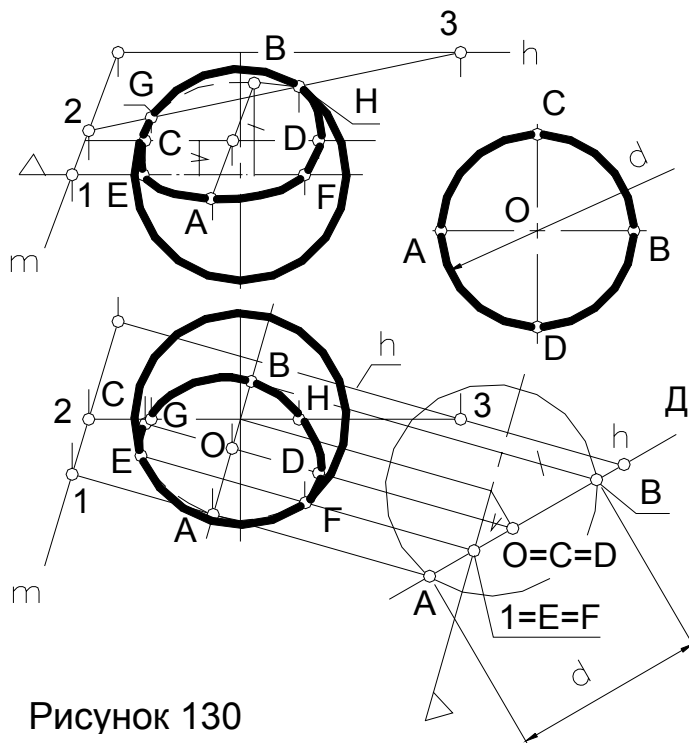


Рисунок 130

**Пример 4.** Построить проекции и натуральную величину сечения сферы плоскостью общего положения  $D(m \times h)$  (рисунок 130).

Этот случай можно свести к предыдущему, если преобразовать чертеж при помощи построения дополнительного вида, с целью превращения плоскости D в проецирующую плоскость. Тогда горизонтальную проекцию и натуральный вид сечения можно построить точно

так же, как это сделано в предыдущем примере.

Для построения фронтальной проекции эллипса необходимо построить фронтальные проекции взаимно перпендикулярных диаметров АВ и СD окружности сечения. Это легко сделать, помня, что при таком преобразовании чертежа сохраняются высоты точек.



Имея сопряженные диаметры эллипса, можно вычертить его, например, с помощью описанного параллелограмма.

В завершении определяем точки видимости G и H на фронтальной проекции, которые построены при помощи фронтали 2-3 плоскости Д, конкурирующей с главным меридианом сферы.

**Пример 5.** Построить проекции и натуральный вид сечения конуса вращения наклонной плоскостью Д (рисунок 131).

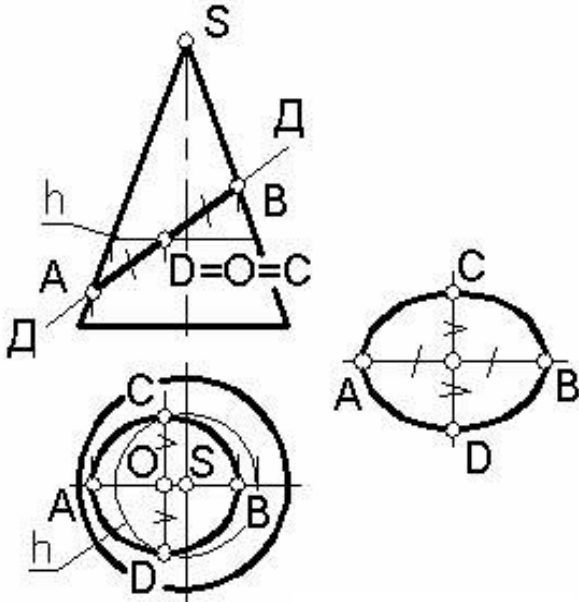


Рисунок 131

Поскольку фронтально проецирующая плоскость Д пересекает все образующие конуса, то в сечении получится эллипс. Фронтальной проекцией эллипса будет отрезок АВ прямой, в которую “выродилась” плоскость Д. Горизонтальная же проекция будет эллипсом, так как ортогональная проекция эллипса так же в общем случае будет эллипсом.

Большая ось АВ эллипса-сечения, являясь фронталью, не искажается на виде спереди (фронтальной проекции). Малая ось CD является фронтально

проецирующей прямой и поэтому на виде спереди проецируется в точку (делящую отрезок АВ пополам), а на виде сверху проецируется без искажения.

Для построения горизонтальных проекций точек С и D малой оси, достаточно провести через эти точки параллель конуса  $h$ , являющуюся окружностью. Теперь эллипс, являющийся проекцией эллипса-сечения можно построить по его осям.

Можно избрать и другой путь построения эллипса – по точкам. Тогда проекции случайных точек можно находить при помощи параллелей конуса (как в случае поверхности вращения) или прямолинейных образующих конуса (как в случае линейчатой поверхности).

Натуральный вид эллипса-сечения можно построить при помощи его осей АВ и CD. При этом длины осей замеряют на тех видах, где они не искажаются: АВ – на виде спереди, CD – на виде сверху.

**Пример 6.** Построить проекции и натуральную величину сечения конуса вращения плоскостью общего положения E( $\alpha h$ ) (рисунок 132).

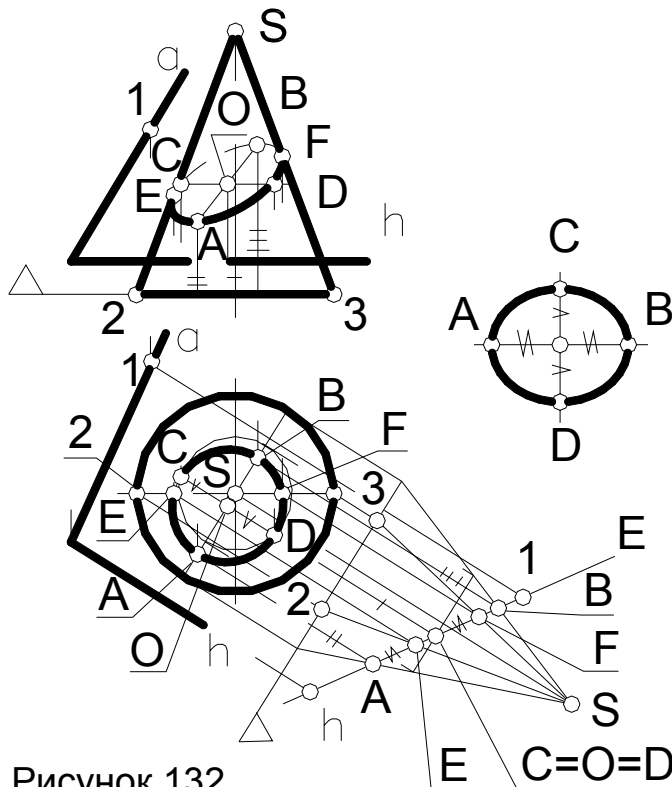


Рисунок 132

сти E и F на виде спереди (фронтальной проекции). Эти точки найдены здесь на пересечении очерковых образующих с секущей плоскостью E.

Натуральный вид сечения (эллипс) построен по осям AB и CD. Размеры осей при этом замерены на тех видах, где они не искажаются: AB – на дополнительном виде, CD – на виде сверху.

**Пример 7.** Построить линию среза головки штока гидроцилиндра двумя параллельными фронтальными плоскостями  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  (рисунок 133).

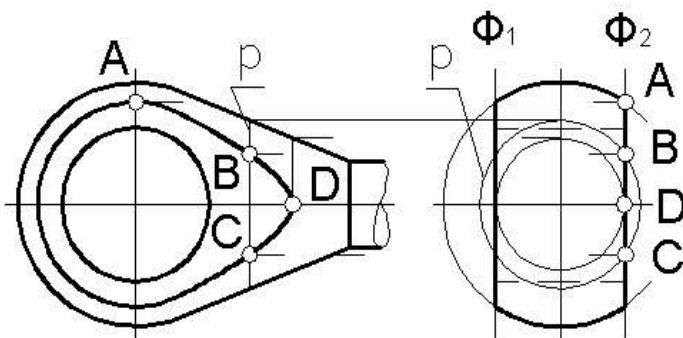


Рисунок 133

фронтальные проекции которых совпадают.

Построение части линии среза на сферической поверхности (окружности) осложнений не вызывает. Эта часть строится не по точкам, а непосредственно циркулем. Точка A определяет радиус окружности на поверхности сферы. Построение части линии среза

Эта задача легко сводится к предыдущей путем построения дополнительного вида на плоскость, перпендикулярную горизонтали  $h$ . При этом плоскость E превращается в проецирующую, как мы имели в предыдущей задаче.

Эллипс, являющийся фронтальной проекцией сечения, построен при помощи сопряженных диаметров AB и CD, концы которых найдены с помощью дополнительного вида. В дополнение к имеющимся построены точки видимости E и F на виде спереди (фронтальной проекции). Эти точки найдены здесь на пересечении очерковых образующих с секущей плоскостью E.

Данная деталь представляет собой тело вращения, ограниченное поверхностями сферы, конуса и цилиндра. В результате среза тела вращения указанными плоскостями получим две части линии пересечения (переднюю и заднюю),

на поверхности конуса (гиперболы) производим по точкам. На рисунке 133 показано построение случайных точек С и В при помощи параллели  $p$ , являющейся окружностью и не искажающейся на профильной проекции (виде слева). Здесь же показано построение вершины гиперболы, точки D. Она построена при помощи параллели, касающейся секущих плоскостей.

**Пример 8.** Построить натуральный вид сечения детали наклонной плоскостью Б (рисунок 134).

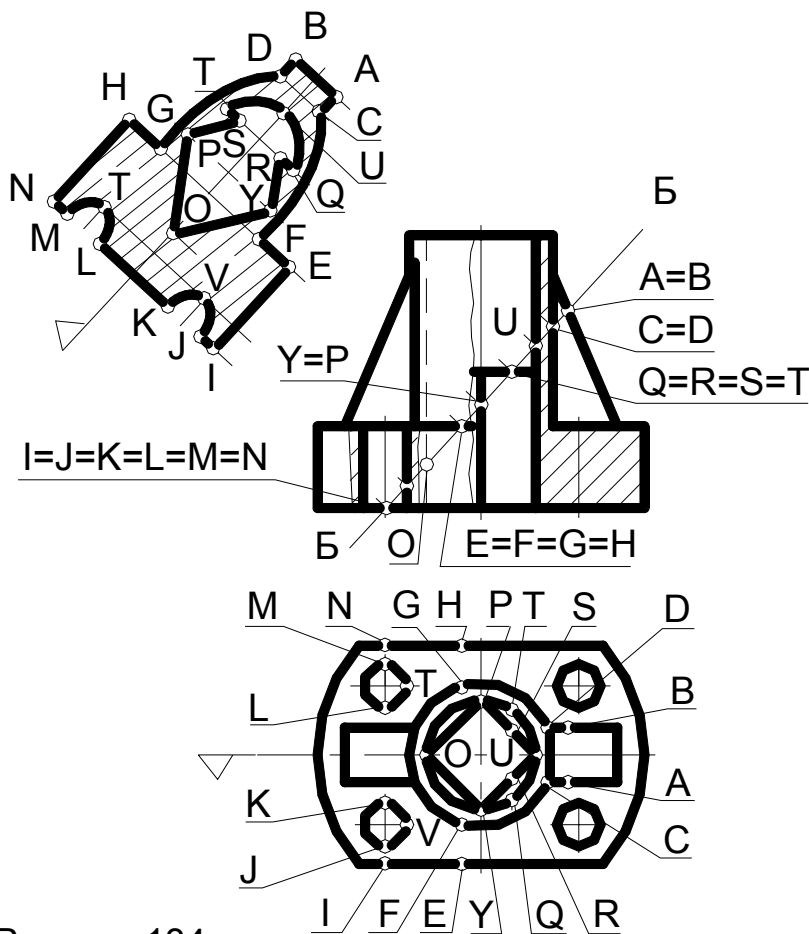


Рисунок 134

Эллипсы, получающиеся в сечении цилиндров, можно строить как по точкам, так и по их осям. При этом малая ось каждого эллипса равна диаметру соответствующего цилиндра, а большая ось – отрезку проекции плоскости Б, заключенному между очерковыми образующими цилиндров.

В этом случае нет необходимости в построении горизонтальной проекции сечения, поскольку высоты и широты точек линий сечения легко определяются непосредственно по чертежу. Действительно, высоты точек не искажаются на виде спереди (фронтальной проекции), где они измеряются вдоль линии сечения. А широты, находясь на фронтально проецирующих прямых, не искажаются на виде сверху (горизонтальной проекции).

### 6.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

#### 6.3.1. Основной способ определения точек пересечения

Для нахождения точек пересечения прямой с какой-либо поверхностью необходимо провести через данную прямую вспомогательную плоскость, после чего найти линию пересечения этой вспомогательной плоскости с данной поверхностью. Точки пересечения полученной линии с данной прямой и будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью.

Обычно в качестве вспомогательной плоскости выбирают проецирующую плоскость, проходящую через данную прямую. Поскольку линия пересечения поверхности с проецирующей плоскостью строится проще, чем с плоскостью общего положения.

Однако в некоторых случаях выгоднее в качестве вспомогательной плоскости выбирать плоскость общего положения, если она будет пересекать заданную поверхность по графически простым линиям.

Учитывая, что линия пересечения поверхности с проецирующей плоскостью, проведенной через данную прямую и сама прямая являются конкурирующими линиями, можно трактовать способ нахождения точек пересечения прямой с поверхностью не только как *способ секущей плоскости*, но и как *способ конкурирующих линий*.

Тогда алгоритм решения подобных задач можно сформулировать так: **для построения точек пересечения прямой линии с поверхностью нужно построить на поверхности вспомогательную линию, конкурирующую с данной прямой, и найти точки пересечения этой линии с прямой.**

При построении вспомогательной линии следует для определения ее отдельных точек использовать графически простые линии поверхности (окружности или прямые).

Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 1.** Построить точки пересечения поверхности вращения с прямой  $t$  (рисунок 135).

Построим на поверхности вспомогательную линию  $m$ , фронтально конкурирующую с данной прямой  $t$ . Точки 1 и 2 вспомогательной линии  $m$  находим на главном меридиане  $f$  поверхности. Остальные точки 3, 4, 5, 6, 7 и 8 находим на параллелях поверхности  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ . Отметим, что параллель  $h_2$  является экватором поверхности. Соединив полученные точки плавной линией, получим линию  $m$ . Искомые точки M и N пересечения прямой с поверхностью определяются как точки пересечения линий  $m$  и  $t$ .

Точка М будет видимой на обеих проекциях, как находящаяся выше экватора и ближе главного меридиана. Точка же N на обеих проекциях будет невидимой, так как находится ниже экватора и за главным меридианом.

**Пример 2.** Построить точки пересечения сферы с прямой  $t$  (рисунок 136).

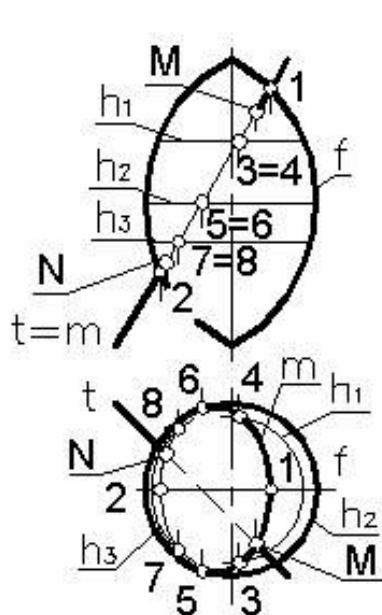


Рисунок 135

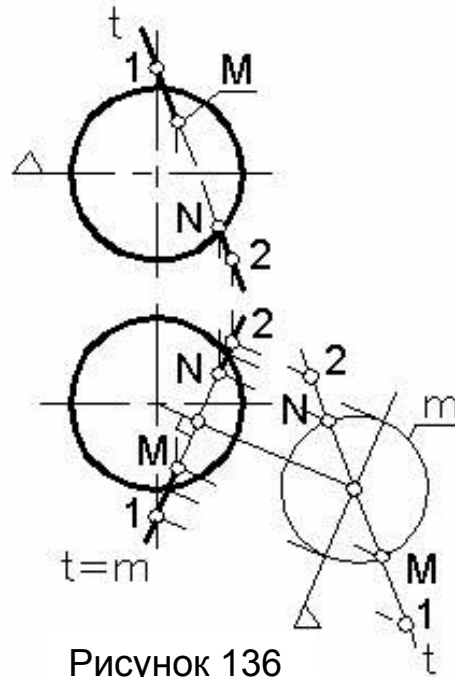


Рисунок 136

Можно решить эту задачу так же как предыдущую, проведя вспомогательную проецирующую секущую плоскость через одну из проекций прямой (например – горизонтальную). При этом на поверхности сферы появится линия  $m$  (окружность), конкурирующая с данной прямой  $t$ .

Однако, чтобы избежать построения эллипса (в который проецируется окружность на фронтальной проекции), преобразуем чертеж, превратив плоскость окружности в плоскость уровня. Тогда на дополнительном виде линия  $m$  изобразится окружностью. Построив на дополнительном виде и проекцию прямой  $t$ , находим точки М и N пересечения  $m$  и  $t$ , которые и являются точками пересечения прямой  $t$  с поверхностью сферы. В завершении задачи достроим основные проекции точек М и N и определим видимость линии  $t$ .

Как видим, решение задачи значительно упрощается, если хотя бы один элемент (прямая или поверхность) является элементом “частного” положения.

Поэтому, **при построении точек пересечения прямой с поверхностью, когда прямая или поверхность являются проецирующими, следует использовать «вырождение» их соответствующих проекций в точку или линию.**

### 6.3.2. Частные случаи построения точек пересечения

**Пример 3.** Построить точки пересечения поверхности прямого кругового конуса с горизонтально проецирующей (вертикальной) прямой  $i$  (рисунок 137).

Горизонтальные проекции искомых точек  $M$  и  $N$  совпадают с горизонтальной проекцией прямой  $i$ . Фронтальные проекции этих точек определяются просто: точки  $M$  – при помощи образующей конуса  $S-1$ , точки  $N$  – на фронтальной проекции основания конуса.

**Пример 4.** Построить точки пересечения поверхности кругового цилиндра с прямой  $t$  (рисунок 138).

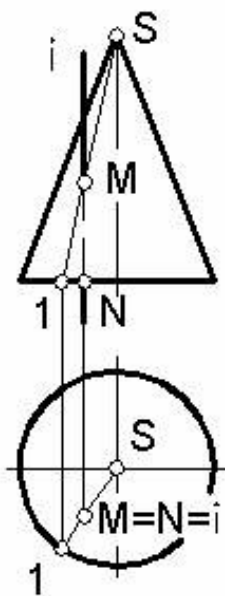


Рисунок 137

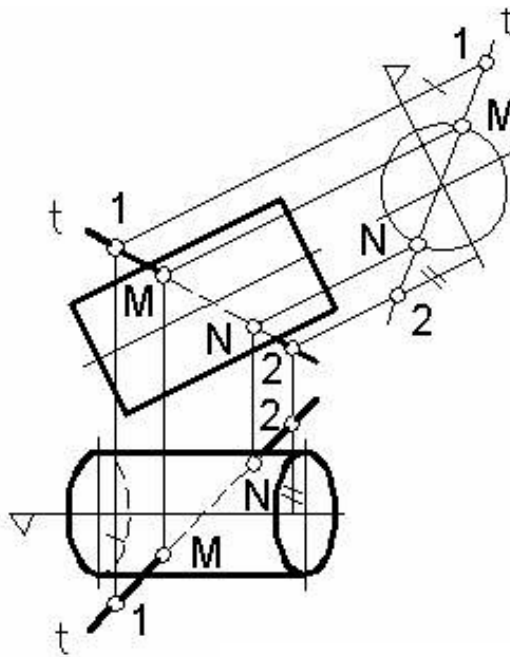


Рисунок 138

Учитывая, что образующие цилиндрической поверхности являются фронталями, можно преобразовать чертеж, превратив поверхность цилиндра в проецирующую. Это достигается построением дополнительной

проекции на плоскость  $D$ , перпендикулярную к образующим цилиндра. В этом случае поверхность кругового цилиндра изобразится окружностью. Построив так же дополнительную проекцию прямой  $i$ , легко находим точки  $M$  и  $N$  на дополнительном виде, после чего несложно определить и их основные проекции.

### 6.3.3. Косоугольное проецирование при построении точек пересечения

В общем случае, при построении точек пересечения прямой  $t$  с конической или цилиндрической поверхностями, линии этих поверхностей, конкурирующие с прямой  $t$ , не будут являться графически простыми. Чтобы избежать непростого построения этих линий, можно в качестве вспомогательной секущей плоскости использовать не проецирующую плоскость, проходящую через данную прямую, а

плоскость общего положения. При этом плоскость выбирается так, чтобы она пересекала данную поверхность по графически простой линии.

В случае цилиндрической поверхности вспомогательную плоскость проводят через данную прямую  $t$  параллельно образующим цилиндра, а в случае конической поверхности – через данную прямую  $t$  и через вершину конуса. В обоих случаях пересечение произойдет по прямым линиям (образующим поверхностей). Для построения этих образующих можно использовать способ дополнительного проецирования (параллельного или центрального).

**Пример 5.** Построить точки пересечения цилиндрической поверхности общего вида с прямой  $t$  (рисунок 139).

Построим дополнительную параллельную проекцию цилиндрической поверхности и прямой  $t$  на плоскость  $\Gamma$  основания цилиндра. За направление проецирования примем параллельность образующим цилиндрической поверхности.

При этом цилиндрическая поверхность проецируется в кривую линию своего основания, а прямая  $t$  – в прямую линию. Если теперь на виде сверху (горизонтальной проекции) найти точки их пересечения  $M$  и  $N$ , то при помощи обратного проецирования легко находятся и их основные проекции.

**Пример 6.** Построить точки пересечения конической поверхности общего вида с прямой  $t$  (рисунок 140).

Построим дополнительную центральную проекцию конической

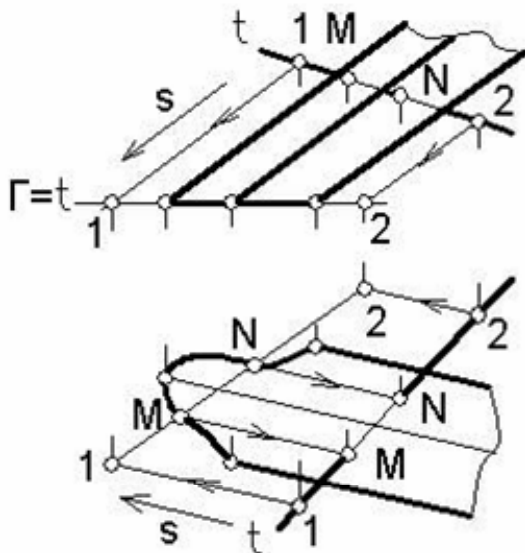


Рисунок 139

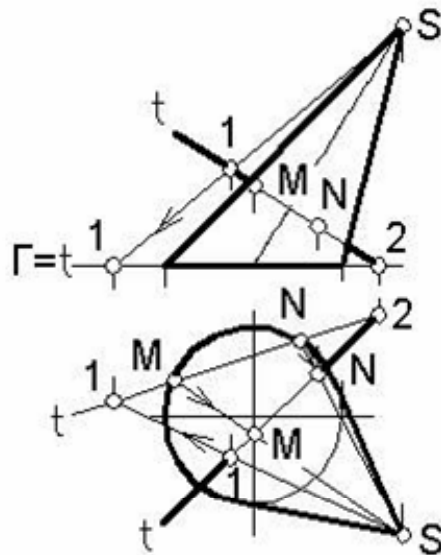


Рисунок 140

поверхности и прямой  $t$  на плоскость  $\Gamma$  основания конической поверхности. За центр проецирования примем вершину конуса  $S$ .

В этом случае коническая поверхность проецируется в кривую линию своего основания, а прямая  $t$  – в прямую линию.

Найдя на виде сверху (горизонтальной проекции) точки М и N пересечения центральных проекций указанных линий, обратным проецированием строим основные проекции искомых точек М и N.

Два последних примера позволяют сделать вывод:

**при построении точек пересечения цилиндрической или конической поверхности общего вида с прямой линией целесообразно применять дополнительное проецирование (параллельное - для цилиндрической поверхности и центральное - для конической). При этом поверхность преобразуется в проецирующую и решение упрощается.**

#### 6.4. ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТЯМ

Если через произвольную точку М кривой поверхности Б (рисунок 141) провести произвольные линии  $\alpha, b$  и  $c$ , принадлежащие этой поверхности, а затем к этим кривым в точке М построить касательные прямые  $t_\alpha, t_b$  и  $t_c$ , то все касательные прямые будут лежать в одной плоскости Е, называемой **касательной плоскостью** к поверхности.

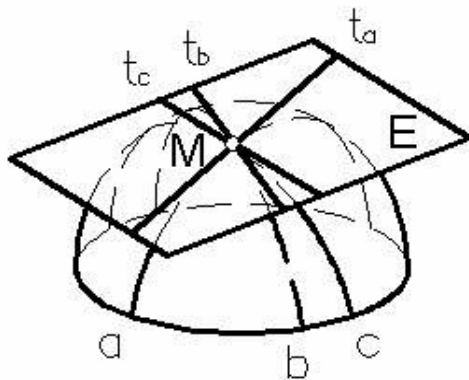


Рисунок 141

Следовательно, **касательная плоскость является геометрическим местом всех касательных, проведенных к данной кривой поверхности и проходящих через одну ее точку.**

Следовательно, **касательная плоскость является геометрическим местом всех касательных, проведенных к данной кривой поверхности и проходящих через одну ее точку.**

Для построения касательной плоскости к поверхности в ее точке М достаточно через эту точку провести на поверхности только две кривые линии  $\alpha$  и  $b$ , и к ним построить касательные прямые  $t_\alpha$  и  $t_b$ .

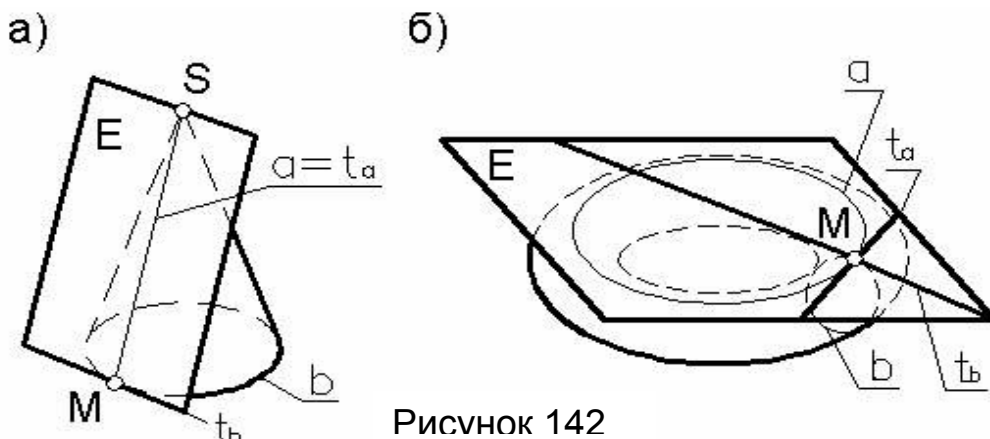


Рисунок 142

Две эти касательные прямые и определяют касательную плоскость Е. Вполне естественно, что в качестве таких кривых линий поверхности выбирают ее графически простые линии. Например, для линей-



чатых поверхностей одной из этих кривых может служить ее прямолинейная образующая, (она будет совпадать со своей касательной), а для поверхности вращения – ее параллель (окружность). В зависимости от вида поверхности касательная плоскость может касаться ее в одной точке (рисунок 141 – сфера), по прямой линии (рисунок 142а – конус), по кривой линии (рисунок 142б – тор).

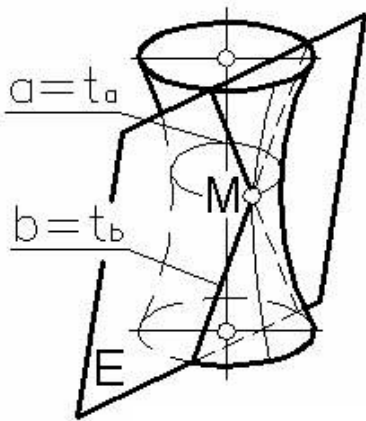


Рисунок 143

В приведенных примерах поверхность располагается по одну сторону от касательной плоскости и не пересекается последней. Однако касательная плоскость может и пересекать поверхность. Так, плоскость  $E$ , касательная к однополостному гиперболоиду, пересекает его по двум образующим  $a$  и  $b$ , которые при этом являются и касательными  $t_a$  и  $t_b$ , определяющими касательную плоскость  $E$  (рисунок 143).

Рассмотрим примеры построения касательной плоскости к различным поверхностям.

**Пример 1.** Построить плоскость  $E$ , касательную к поверхности вращения в ее точке  $M$  (рисунок 144).

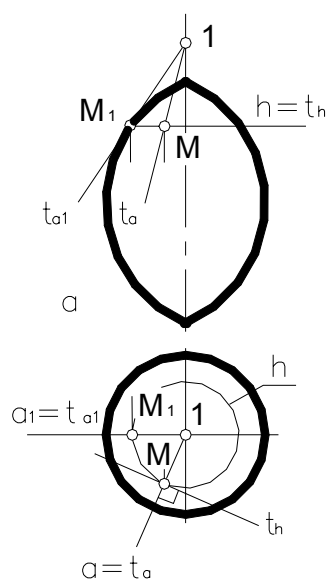


Рисунок 144

В качестве двух кривых линий поверхности, касательные к которым определяют искомую плоскость  $E$ , выберем параллель  $h$  и меридиан  $a$ , проходящие через точку  $M$ .

Параллель  $h$  является окружностью, расположенной горизонтально, и построение касательной  $t_h$  к ней не составляет труда. Для построения касательной  $t_a$  к меридиану  $a$  предварительно преобразуем чертеж, повернув меридиан вокруг оси поверхности вращения до фронтального положения  $a_1$ . При этом точка  $M$  займет положение  $M_1$ . Теперь построим касательную  $t_{a_1}$  к фронтальному меридиану  $a_1$  в его точке  $M_1$  и, произведя обратное вращение, получим искомую касательную к меридиану  $a$ .

Касательная к поверхности вращения плоскость  $E$  определяется двумя пересекающимися прямыми  $t_h$  и  $t_a$ .

**Пример 2.** Построить плоскость  $E$ , касательную к поверхности конуса в его точке  $M$  (рисунок 145).

Так как конус – поверхность линейчатая, то, проведя через точку  $M$  образующую  $t$  (являющуюся в то же время и касательной), получим одну из прямых, определяющих искомую плоскость  $E$ . Второй прямой будет касательная  $t_h$  к окружности на поверхности конуса  $h$  в ее точке  $M$ .

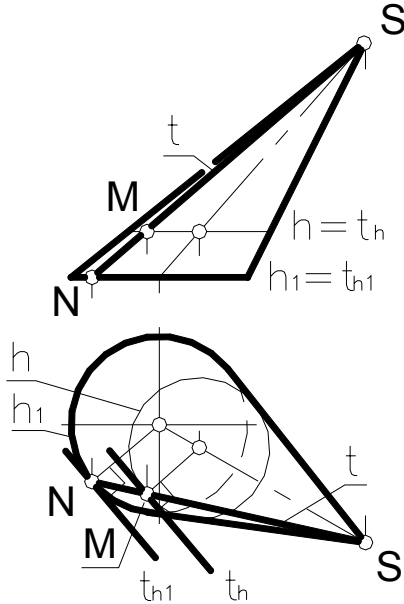


Рисунок 145

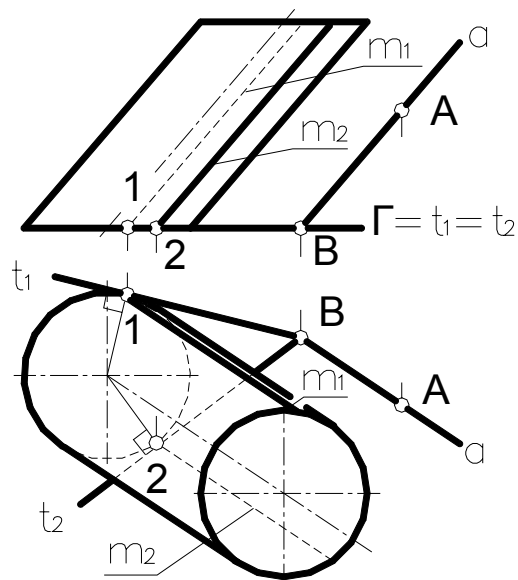


Рисунок 146

Отметим, что касательная  $t_h$  параллельна касательной  $t_1$ , проведенной в точке  $N$  к окружности основания конуса. Поэтому искомую касательную плоскость  $E$  можно задать образующей  $t$  и касательной  $t_1$ , не строя вспомогательной окружности  $h$ , проходящей через точку  $M$ .

**Пример 3.** Построить касательную к цилиндрической поверхности плоскость  $E$ , проходящую через точку  $A$ , расположенную вне поверхности цилиндра (рисунок 146).

Поскольку искомая касательная плоскость должна содержать в себе образующую цилиндрической поверхности, то в качестве первой прямой, определяющей касательную плоскость, можно провести через данную точку  $A$  прямую  $\alpha$  параллельную образующей цилиндра.

Если теперь провести через точку  $B$  (точку пересечения прямой  $\alpha$  с плоскостью  $\Gamma$ ) касательные к окружности основания цилиндра прямые  $t_1$  и  $t_2$ , то прямая  $\alpha$  и касательные  $t_1$  и  $t_2$  определяют две касательные плоскости  $E(\alpha t_1)$  и  $K(\alpha t_2)$ . Эти плоскости касаются поверхности цилиндра с разных сторон по его образующим  $m_1$  и  $m_2$ .

## ГЛАВА 7

### ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

---

#### 7.1. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В общем случае линия пересечения двух поверхностей представляет собой пространственную кривую, которая может распадаться на несколько частей. Эти части могут быть и плоскими кривыми.

Линию пересечения поверхностей обычно строят по ее отдельным точкам. Общим способом построения этих точек является **способ поверхностей-посредников**. Суть способа в следующем. Обе данные поверхности пересекаются вспомогательной поверхностью; затем определяются линии пересечения данных поверхностей и вспомогательной поверхности, после чего на пересечении этих линий определяются точки, принадлежащие одновременно обоим данным поверхностям, т.е. их линии пересечения.

Чаще всего в качестве поверхностей-посредников применяют **плоскости** или **сферы**. Исходя из этого различают следующие способы построения точек линии пересечения двух поверхностей:

- способ вспомогательных плоскостей, разделяющийся на способы вспомогательных проецирующих плоскостей и вспомогательных плоскостей общего положения;
- способ вспомогательных сфер, разделяющийся на способы концентрических и эксцентрических сфер.

Применение того или иного способа зависит от типа данных поверхностей и их взаимного расположения.

**Способ вспомогательных проецирующих плоскостей** применяют тогда, когда обе поверхности можно пересечь по графически простым линиям (прямым или окружностям) некоторой совокупностью проецирующих плоскостей, в частности плоскостями уровня.

**Способ вспомогательных плоскостей общего положения** применяют при построении линии пересечения конических (пирамидальных) и цилиндрических (призматических) поверхностей общего вида.

**Способ вспомогательных концентрических сфер** применяют для построения точек линии пересечения поверхностей вращения при соблюдении следующих условий:

- поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную какой-либо плоскости проекций;

- каждая из поверхностей содержит семейство окружностей, по которым ее могут пересекать вспомогательные сферы, общие для обеих поверхностей;

- оси поверхностей вращения пересекаются в некоторой точке.

**Способ вспомогательных эксцентрических сфер** применяют для построения точек линии пересечения поверхностей вращения при соблюдении почти тех же условий, кроме последнего:

- оси поверхностей вращения скрещиваются.

В тех случаях, когда линия пересечения поверхностей второго порядка распадается на плоские кривые и заранее известен вид кривых, можно построить эти кривые по их основным элементам, не прибегая к трудоемкому построению линии пересечения по точкам.

Если хотя бы одна из пересекающихся поверхностей является проецирующей поверхностью, то построение линии пересечения упрощается, поскольку в этом случае одна из проекций линии пересечения уже имеется на чертеже – она совпадает с изображением «вырожденной» в линию поверхности. Поэтому при пересечении некоторой поверхности с цилиндрической или призматической поверхностями полезным бывает предварительное преобразование последних в проецирующие.

Независимо от способа построения линии пересечения, следует соблюдать определенную последовательность нахождения точек этой линии. У линии пересечения поверхностей различают **опорные** и **случайные** точки (как и в случае пересечения поверхности с плоскостью, см. 6.1).

Сразу нужно сказать, что проекции линии пересечения всегда находятся в пределах **площади наложения** одноименных проекций пересекающихся поверхностей.

Построение линии пересечения начинают с нахождения опорных точек. Они позволяют определить пределы расположения проекции линии пересечения и зоны, где имеет смысл находить случайные точки для более точного построения линии пересечения.

Определение видимости линии пересечения проводят отдельно для каждого участка, ограниченного точками видимости. Видимость участка совпадает с видимостью любой случайной точки этого участка.

## 7.2. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПРОЕЦИРУЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

### 7.2.1. Общий случай применения способа

Построение точек линии пересечения поверхностей указанным способом состоит в проведении проецирующих плоскостей, пересекающих обе данные поверхности по графически простым линиям (прямым или окружностям). Пересечение этих линий, принадлежащих разным поверхностям и лежащим в одной секущей плоскости, определяет точки общие для обеих поверхностей – точки принадлежащие линии их пересечения.

Учитывая принадлежность графически простых линий одной проецирующей плоскости, можно трактовать указанный способ и как **способ конкурирующих линий**, проводимых на данных пересекающихся поверхностях.

Следовательно, **если у пересекающихся поверхностей имеются семейства графически простых линий, лежащих в проецирующих секущих плоскостях** (или конкурирующих друг с другом), **то точки пересечения этих линий и будут точками искомой линии пересечения.**

Рассмотрим несколько примеров построения линии пересечения поверхностей указанным способом.

**Пример 1.** Построить линию пересечения конуса вращения и цилиндра вращения, оси которых скрещиваются (рисунок 147).

Если пересекать обе поверхности горизонтальными плоскостями, то на поверхности цилиндра появятся образующие (прямые линии), а на конусе – его параллели (окружности). На виде спереди (фронтальной проекции) эти линии будут конкурировать; на виде сверху (горизонтальной проекции) окружности (параллели конуса) будут изображаться без искажений.

Для начала определим опорные точки. На виде сверху (горизонтальной проекции) для цилиндра точками видимости являются точки А и В, которые одновременно будут и самыми дальними точками линии пересечения. Эти точки находятся на пересечении контурной образующей цилиндра  $h_1$  и конкурирующей с ней параллелью конуса  $h_2$ . У конуса точек видимости на виде сверху нет, поскольку вся его поверхность здесь видима.

На виде спереди (фронтальной проекции) точки видимости для цилиндра С, D и Е, F находятся на пересечении контурных образующих цилиндра  $h_3$  и  $h_5$  и конкурирующих с ними параллелей конуса  $h_4$  и  $h_6$ . При этом точки С и D будут высшими точками линии пересечения, а точки Е и F – низшими. Для конической поверхности здесь точ-

ками видимости будут точки G, H и K, L, находящиеся на пересечении контурных образующих конуса  $f_1$  и  $f_3$  и конкурирующих с ними образующих цилиндра  $f_2$  и  $f_4$ . При этом фронтальные проекции образующих  $f_2$  и  $f_4$  построены с помощью вида слева (профильной проекции).

Точки M и N найдены на пересечении контурной образующей конуса  $p$  с окружностью, в которую «вырождается» поверхность цилиндра на виде слева.

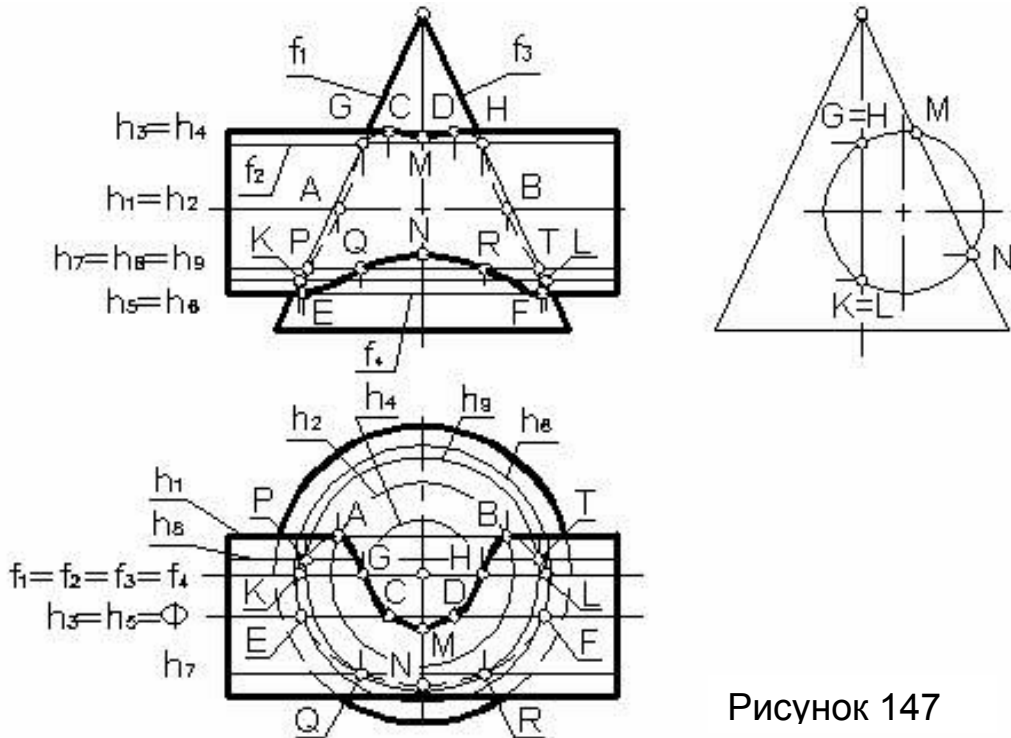


Рисунок 147

После нахождения опорных точек можно построить несколько случайных, например P, Q, R и T, уточняющих линию пересечения поверхностей. Эти точки находятся на пересечении образующих цилиндра  $h_7$  и  $h_8$  и конкурирующей с ними параллели конуса  $h_9$ .

Построив аналогично достаточное количество случайных точек, соединим их в определенной последовательности, учитывая условия видимости. В нашем примере видимость проекций линии пересечения определяется цилиндрической поверхностью. Поэтому видимыми будут только те ее участки, которые расположены на видимой части цилиндрической поверхности.

### 7.2.2. Частные случаи пересечения

**Если при построении линии пересечения двух поверхностей хотя бы одна из них является проецирующей, следует использовать «вырождение» проекции этой поверхности в линию.**

Построение линии пересечения в этом случае значительно упрощается, поскольку линия пересечения поверхностей уже имеется

на чертеже - она совпадает с «вырожденной» в линию поверхностью. Другая проекция линии пересечения легко определяется с помощью графически простых линий второй поверхности.

**Пример 2.** Построить линию пересечения двух цилиндров вращения со скрещивающимися осями, поверхность одного из которых является проецирующей (рисунок 148).

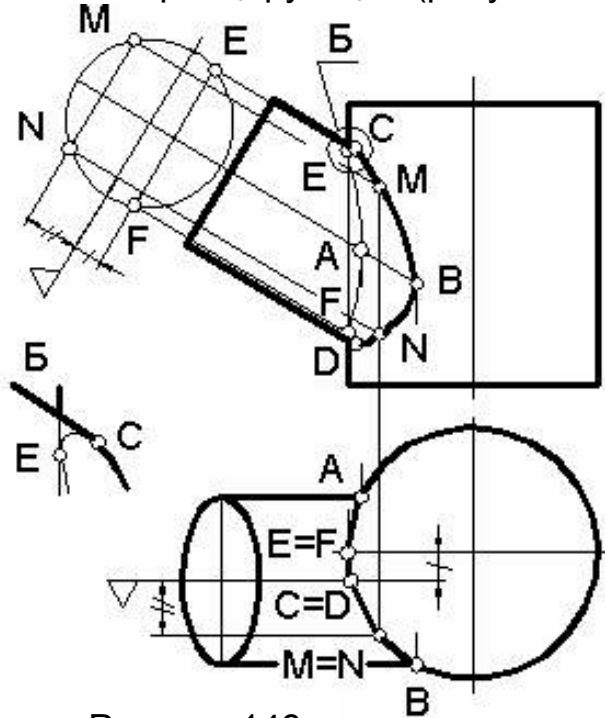


Рисунок 148

В данном случае одна из проекций линии пересечения (горизонтальная) уже имеется, она совпадает с дугой АВ окружности, в которую «вырождается» поверхность вертикально расположенного цилиндра.

Для построения фронтальной проекции (вида спереди) линии пересечения построим фронтальные проекции определяющих ее точек при помощи образующих второго цилиндра (прямых линий).

Опорные точки А и В (дальняя и ближняя) находят-

ся на дальней и ближней образующих наклонного цилиндра, совпадающих на виде спереди (фронтальной проекции) с его осью.

Точки С и D (высшая и низшая) являются одновременно и точками видимости наклонного цилиндра на виде спереди (фронтальной проекции).

Точки Е и F (самые левые) являются точками видимости для вертикального цилиндра на виде спереди (фронтальной проекции). Для нахождения их фронтальных проекций удобно построить дополнительный вид наклонного цилиндра на плоскость, перпендикулярную образующим цилиндра. Здесь цилиндр проецируется в окружность, и проекции точек легко определяются с помощью глубины (отмеченной одним штрихом), замеренной на виде сверху.

Построим несколько случайных точек линии пересечения, например точки М и N. Их так же удобно находить при помощи имеющегося дополнительного вида. Для определения положения их проекций используем замеренную на виде сверху глубину, отмеченную двумя штрихами.

Видимость линии пересечения определяется точками видимости С и D наклонного цилиндра, расположенного ближе, чем вертикальный.

На выносном элементе показана форма линии пересечения в зоне точек Е и С. В нижней части, в зоне точек D и F, линия пересечения выглядит аналогично.

Рассмотрим пример, когда на чертеже нет «вырожденных» видов поверхностей, но имеется возможность при помощи преобразования чертежа его получить.

**Пример 3.** Построить линию пересечения сферы и треугольной призмы (рисунок 149).

Грани призмы являются плоскостями, поэтому линия пересечения указанных поверхностей будет состоять из дуг окружностей, соединяющихся между собой в точках пересечения ребер призмы со сферой.

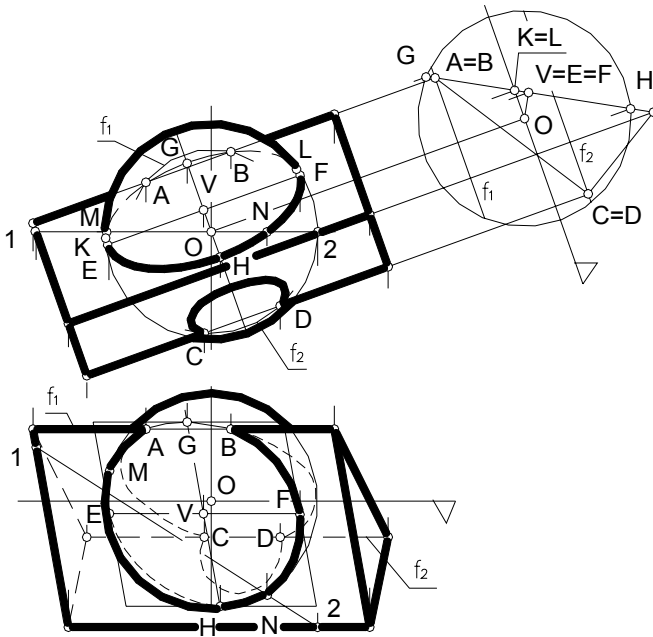


Рисунок 149

В этом случае (как и в других, при построении линии пересечения многогранной и кривой поверхностей) задача сводится к последовательному решению задачи о пересечении кривой поверхности с прямой и плоскостью (см. пункты 34-36), где пользуются вспомогательными проецирующими плоскостями, приводящими к построению конкурирующих линий.

Для упрощения построений преобразуем чертеж, построив дополнительный вид на плоскость, перпендикулярную боковым ребрам призмы. Дополнительная плоскость будет фронтально проецирующей, так как ребра призмы являются фронталями. На дополнительном виде боковая поверхность призмы «вырождается» в треугольник, что облегчает построение линии пересечения ее со сферой.

При помощи фронталей  $f_1$  и  $f_2$  сферы, конкурирующих с боковыми ребрами призмы, находим точки А,В и С, D пересечения ребер призмы со сферой (см. 6.2, пример 2, рисунок 136).

Затем строим линии пересечения сферы с каждой из боковых граней призмы (см. 6.1, пример 3, рисунок 129).



Чтобы не загромождать чертеж лишними построениями, подробно рассмотрим построение линии пересечения сферы только с одной гранью призмы, видимой на обеих основных проекциях.

Сначала находим точку  $V$  - центр окружности, являющейся искомой линией пересечения. Для этого на дополнительном виде из центра сферы  $O$  опустим перпендикуляр на линию  $GH$ . После нахождения дополнительной проекции точки  $V$ , легко находятся и ее основные (фронтальная и горизонтальная) проекции.

Отрезок  $GH$  дополнительного вида определяет величину диаметра искомой окружности. Эллипс, в который проецируется эта окружность на виде спереди (фронтальной проекции), определяется своими осями  $EF$  и  $GH$ . Ось  $EF$  при этом равна диаметру окружности (т.е. отрезку  $GH$ ). С помощью дополнительной проекции находятся и точки видимости  $K$  и  $L$  для вида спереди.

Чтобы построить горизонтальную проекцию (вид сверху) указанной окружности, так же являющуюся эллипсом, необходимо построить горизонтальные проекции ее взаимно перпендикулярных диаметров  $EF$  и  $GH$ . Горизонтальные проекции этих диаметров будут сопряженными диаметрами эллипса, с помощью которых можно построить и сам эллипс.

В завершении нужно определить точки видимости  $M$  и  $N$  для горизонтальной проекции этой части линии пересечения. Они построены при помощи прямой 1-2, лежащей в рассматриваемой грани и конкурирующей с экватором сферы.

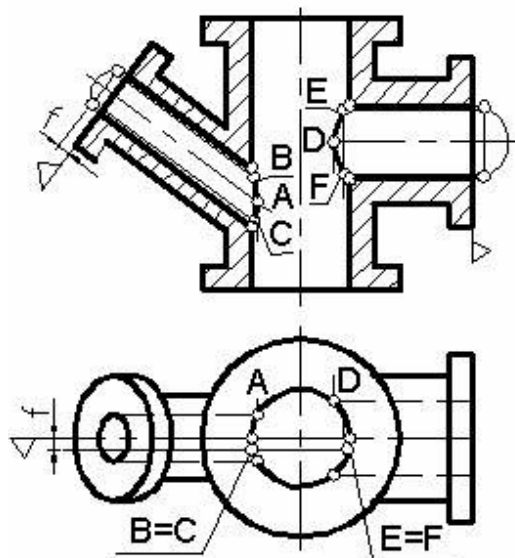


Рисунок 150

В завершении нужно определить точки видимости  $M$  и  $N$  для горизонтальной проекции этой части линии пересечения. Они построены при помощи прямой 1-2, лежащей в рассматриваемой грани и конкурирующей с экватором сферы.

**Пример 4.** Рассмотрим технический пример построения линий перехода (пересечения) цилиндров вращения разных диаметров при пересекающихся осях (рисунок 150).

Опорные точки в этом случае определяются просто. Для построения же нескольких случайных точек линии перехода используем построение дополнительных видов для наклонного и горизонтально расположенного цилиндров. Положение дополнительных плоскостей выбираем перпендикулярное осям цилиндров, в этом

случае поверхности цилиндров будут проецирующими по отношению к ним.

### 7.3. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Как отмечалось ранее, указанный способ рекомендуется применять при построении линии пересечения конических и цилиндрических поверхностей общего вида, а также поверхностей пирамид и призм.

Вспомогательные секущие плоскости выбирают так, чтобы они пересекали обе поверхности по их образующим. Поскольку данные поверхности являются поверхностями общего вида, то и секущие плоскости также будут плоскостями общего положения.

В случае пересечения двух конусов эти плоскости должны проходить через прямую, соединяющую их вершины.

При пересечении конической и цилиндрической поверхностей вспомогательные секущие плоскости должны проходить через прямую, проведенную через вершину конуса и параллельную образующим цилиндра (рисунок 151).

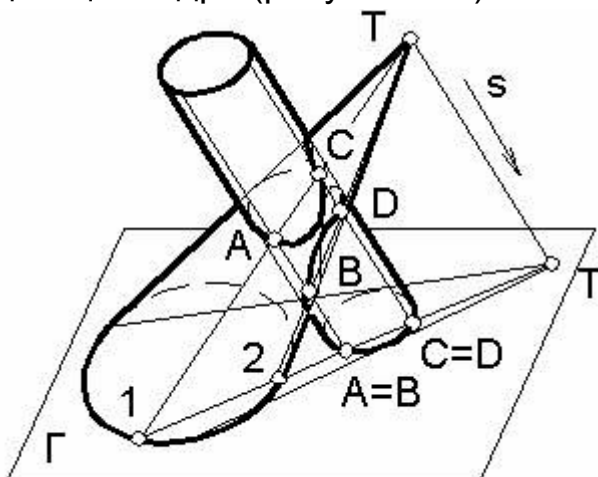


Рисунок 151

В случае пересечения двух цилиндрических поверхностей вспомогательные плоскости должны быть параллельны некоторой *плоскости параллелизма*, определяемой двумя пересекающимися прямыми, параллельными образующим цилиндрических поверхностей.

При указанном выборе вспомогательных поверхностей они пересекут обе заданные поверхности по их образующим.

Точки пересечения этих образующих и будут точками линии пересечения поверхностей.

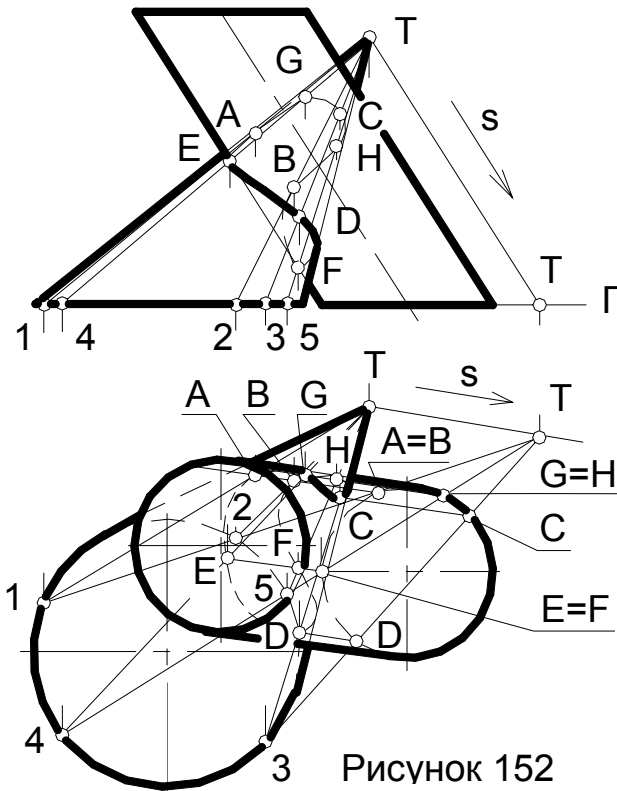
Рассмотрим конкретный пример.

**Пример 1.** Построить линию пересечения конической и цилиндрической поверхностей общего вида (рисунки 151, 152).

Применим дополнительное параллельное проецирование по направлению  $s$ , параллельному образующим цилиндра. Строим на плоскости  $\Gamma$  дополнительную проекцию вершины конуса  $T$ , через которую пройдут дополнительные проекции всех образующих конуса.

Сначала проведем дополнительные проекции  $T-1$ ,  $T-2$  и  $T-3$  крайних образующих конуса, на пересечении которых с дополнительной проекцией цилиндра получаем дополнительные проекции точек линии пересечения  $A=B$ ,  $C$  и  $D$ . Проведя через эти проекции обрат-

ные лучи до пересечения с соответствующими горизонтальными проекциями крайних образующих Т-1, Т-2 и Т-3, получим горизонтальные проекции А, В, С и D точек линии пересечения. Фронтальные проекции указанных точек легко строятся при помощи тех же образующих конуса Т-1, Т-2 и Т-3.



Теперь внутри угла, определяемого дополнительными проекциями крайних образующих конуса, проводим дополнительные проекции промежуточных (случайных) образующих конической поверхности. На пересечении их с дополнительной проекцией цилиндра на плоскости  $\Gamma$  получаем дополнительные проекции случайных точек линии пересечения.

При определении случайных точек линии пересечения предварительно необходимо построить ее точки видимости.

Для этого нужно внутри указанного угла провести дополнительные проекции контурных и тех образующих конуса, которые пересекаются с контурными образующими цилиндра.

На нашем примере показано построение дополнительных проекций промежуточных образующих конуса Т-4 и Т-5, на пересечении которых с дополнительной проекцией цилиндра на плоскость  $\Gamma$  находятся дополнительные проекции  $E=F$  и  $G=H$  точек линии пересечения. Обратным проецированием строим основные проекции указанных точек. Нужно отметить, что если точки  $G$  и  $H$  являются случайными, то точки  $E$  и  $F$  - точки видимости для цилиндрической поверхности на виде спереди (фронтальной проекции).

Последовательность соединения отдельных точек линии пересечения поверхностей легко устанавливается по ее дополнительной проекции:  $C-G-A-E-D-F-B-H-C$ .

Определение видимости линии пересечения производится по ее отдельным участкам, заключенным между точками видимости. При этом нужно определять видимость какой-либо случайной точки рассматриваемого участка. Видимой будет та точка, которая принадлежит видимым образующим обеих поверхностей.

Определение видимости линии пересечения производится по ее отдельным участкам, заключенным между точками видимости. При этом нужно определять видимость какой-либо случайной точки рассматриваемого участка. Видимой будет та точка, которая принадлежит видимым образующим обеих поверхностей.

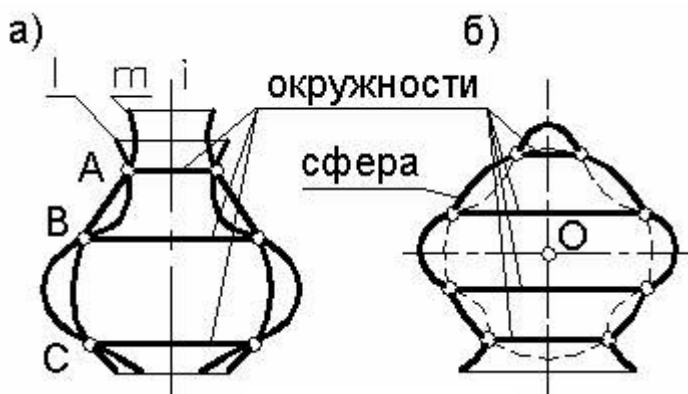
В заключение следует отметить, что если основания поверхностей в некоторой предлагаемой задаче будут располагаться в разных плоскостях, то в качестве плоскости для дополнительного проецирования следует выбрать плоскость одного из оснований поверхностей. Остальные рассуждения и построения будут схожи с описанным случаем.

#### 7.4. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР

При построении линии пересечения двух поверхностей **способом вспомогательных сфер** возможны два случая. В первом из них пользуются сферами, проведенными из одного, общего для всех сфер центра. Во втором – сферами, проведенными из разных центров. Исходя из этого, различают два варианта способа сфер: **способ концентрических сфер** и **способ эксцентрических сфер**.

Прежде чем подробнее рассмотреть оба способа, остановимся на пересечении **соосных** поверхностей вращения (поверхностей вращения с одной общей осью).

Видно, что такие поверхности (рисунок 153а) пересекаются друг с другом по окружностям. Число этих окружностей равно числу точек пересечения меридианов поверхностей. Так, если одна поверхность образуется вращением меридиана  $m$ , а другая – меридиана  $l$ , то общие точки меридианов А, В и С будут описывать окружности, общие



для обеих поверхностей. Если при этом ось вращения поверхностей параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость окружности будут проецироваться в виде отрезков прямых линий.

Отдельно нужно сказать о таком случае пересечения соосных поверхностей, когда

одна из них является сферой. **Если центр сферы находится на оси какой-либо поверхности вращения, то сфера соосна с этой поверхностью и пересекает ее по окружностям** (рисунок 153б).

Указанное свойство и положено в основу способа концентрических сфер.



Теперь необходимо определить радиусы максимальной и минимальной сфер, пригодных для нахождения точек линии пересечения.

Радиус максимальной сферы  $R_{\max}$  равен расстоянию от фронтальной проекции центра сфер  $O$  до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих. В нашем примере это точка  $A$ .

Для определения радиуса минимальной сферы  $R_{\min}$  необходимо провести из точки  $O$  нормали к очерковым образующим обеих поверхностей. Большой из отрезков этих нормалей и принимается в качестве  $R_{\min}$ . В этом случае сфера минимального радиуса будет касаться одной из поверхностей и пересекать вторую. Если бы за минимальный радиус сфер был взят меньший отрезок, то одна из данных поверхностей с такой сферой не пересечется.

В нашем примере сферой минимального радиуса будет сфера, касающаяся цилиндрической поверхности. Она касается цилиндра по окружности 1-2, а поверхность конуса пересекает по двум окружностям 3-4 и 5-6. Точки  $E=F$  и  $G=H$  пересечения этих окружностей будут точками линии пересечения поверхностей.

Для построения других случайных точек линии пересечения, проводят несколько концентрических сфер, с центром в точке  $O$ . Радиус этих сфер должен изменяться в диапазоне от  $R_{\min}$  до  $R_{\max}$ . На рисунке 153 проведена только одна дополнительная сфера радиуса  $R$ . Она пересекает поверхность цилиндра по окружностям 7-8 и 9-10, а поверхность конуса по окружностям 11-12 и 13-14. На пересечении этих окружностей получаем точки  $K=L$ ,  $M=N$  и  $P=Q$  линии пересечения.

Для построения горизонтальных проекций точек линии пересечения в данном примере удобно использовать окружности, принадлежащие конической поверхности, поскольку они не искажаются на горизонтальной проекции (виде сверху).

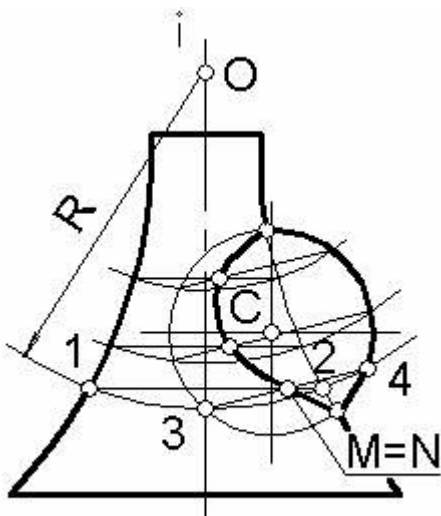


Рисунок 155

Если бы в нашем примере оси поверхностей были не параллельны какой-нибудь плоскости проекций, то преобразованием чертежа (например, построением дополнительного вида) можно привести их в положение, параллельное новой плоскости проекций.

**Пример 2.** Построить линию пересечения сферы с поверхностью вращения общего вида, ось которой находится в одной фронтальной плоскости с осью сферы (рисунок 155).

Из любой точки пространства (за исключением центра сферы  $C$ ) можно

провести концентрические сферы, пересекающие данную сферу по окружностям. Из любой точки оси  $i$  можно провести концентрические сферы, пересекающие данную поверхность вращения по окружностям. Поэтому геометрическим местом точек пространства, из которых можно провести концентрические сферы, пересекающие по окружностям обе указанные поверхности, будет ось  $i$  поверхности вращения.

Следовательно, если из любой точки  $O$  оси  $i$  поверхности вращения описать концентрические сферы, то они пересекут данную поверхность по окружностям. Так вспомогательная сфера некоторого радиуса  $R$  пересечет поверхность вращения по окружности 1-2, а данную сферу по окружности 3-4. На фронтальной проекции обе эти окружности изображаются отрезками прямых. Точки  $M$  и  $N$  пересечения указанных окружностей будут точками искомой линии пересечения. Проведя еще ряд вспомогательных сфер, получим дополнительные точки линии пересечения.

Для построения горизонтальных проекций точек линии пересечения удобно использовать окружности, принадлежащие поверхности вращения, которые не искажаются на виде сверху (горизонтальной проекции).

Таким образом, мы показали, что ***способ концентрических сфер можно применять для построения линии пересечения двух поверхностей, у которых имеется общая плоскость симметрии, и каждая из которых содержит семейство окружностей, по которым ее могут пересекать концентрические сферы, общие для обеих поверхностей.***

#### 7.4.2. Способ эксцентрических сфер

Этот способ построения линии пересечения двух поверхностей состоит в применении вспомогательных сфер, имеющих различные центры.

Уточнение условий применения этого способа проведем с помощью примера, аналогичного предыдущему (см. рисунок 155). Там мы выяснили, что центры вспомогательных сфер, пересекающих обе заданные поверхности по окружностям, должны находиться на оси поверхности вращения. Построение линии пересечения в этом случае можно выполнить не только способом концентрических сфер (как в указанном примере), но и способом эксцентрических сфер.

**Пример 3.** На рисунке 156 показано построение точек линии пересечения поверхностей именно способом эксцентрических сфер.

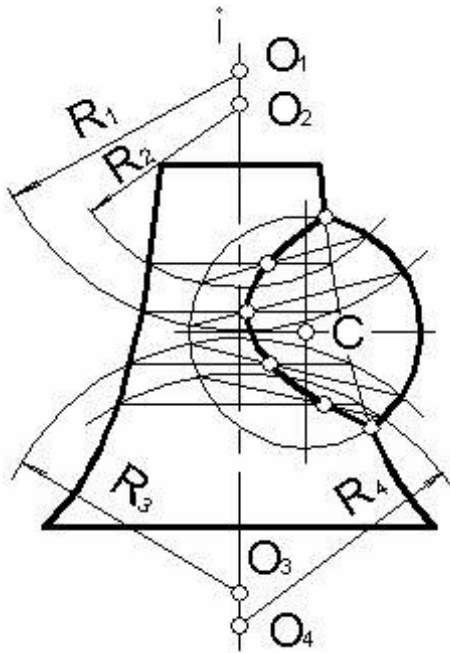


Рисунок 156

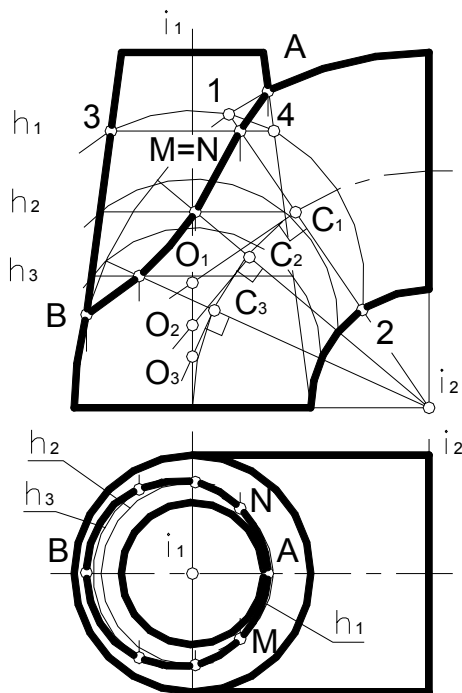


Рисунок 157

При этом проведены четыре вспомогательные сферы радиусов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  из различных центров  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  и  $O_4$  находящихся на оси  $i$  поверхности вращения. Каждая из вспомогательных сфер пересекает данные поверхности по окружностям. Точки пересечения названных окружностей и будут точками искомой линии пересечения поверхностей.

**Пример 4.** Построить линию пересечения поверхностей тора и конуса вращения, имеющих общую фронтальную плоскость симметрии (рисунок 157).

Опорные точки  $A$  и  $B$  пересечения контурных линий являются высшей и низшей, правой и левой, а также и точками видимости линии пересечения. Применить для решения данной задачи способ концентрических сфер нельзя, поскольку оси поверхностей  $i_1$  и  $i_2$  не пересекаются, как необходимо для применения этого способа.

Примем во внимание, что у поверхности тора кроме окружностей, расположенных в плоскостях перпендикулярных оси  $i_2$ , есть еще семейство окружностей, проходящих через ось  $i_2$ . Центры сфер, пересекающих тор по этим окружностям, должны находиться на перпендикулярах к плоскостям окружностей, проведенным через центры окружностей  $C_1$ ,  $C_2$  и т.д.

Поэтому если брать центры вспомогательных эксцентрических сфер в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и т.д. пересечения этих перпендикуляров с осью конуса, то сферы проведенные из указанных центров пересекут обе поверхности по окружностям. Точки пересечения окружностей обеих поверхностей, принадлежащие одной и той же сфере, и будут точками линии пересечения поверхностей.



На рисунке 157 проведены три вспомогательные эксцентрические сферы. Случайные точки М и N линии пересечения найдены следующим образом. Сначала в произвольном месте между опорными точками А и В проводим меридиан тора 1-2 (окружность). Из центра  $S_1$  восстанавливаем перпендикуляр к плоскости окружности. Центр первой вспомогательной сферы будет находиться в точке  $O_1$  пересечения проведенного перпендикуляра с осью конуса. Опишем из этого центра сферу такого радиуса, чтобы она пересекала тор по окружности 1-2. Эта сфера пересечет и поверхность конуса по окружности 3-4. На пересечении окружностей 1-2 и 3-4 получаем пару случайных точек М и N линии пересечения поверхностей.

Для определения горизонтальных проекций точек линии пересечения используем параллели конуса, являющиеся графически простыми линиями (окружностями). Например, горизонтальные проекции точек М и N построены при помощи параллели  $h_1$  поверхности конуса.

Два рассмотренных примера показывают, что ***способ эксцентрических сфер можно применять для построения линии пересечения двух поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии; при этом каждая из поверхностей должна содержать семейства окружностей, по которым ее могут пересекать эксцентрические сферы, общие для обеих поверхностей.***

## 7.5. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Линия пересечения поверхностей второго порядка является кривой четвертого порядка, так как известно, что порядок линии пересечения двух алгебраических поверхностей равен произведению порядков поверхностей. Линия четвертого порядка пересекается с плоскостью в четырех точках (действительных и мнимых). В отдельных случаях линия пересечения поверхностей второго порядка может распадаться на несколько частей. Особый интерес представляет случай, когда она распадается на пару плоских кривых второго порядка. В качестве примера рассмотрим пересечение сферы с конусом, имеющим круговое основание (рисунок 158). Здесь линия пересечения распадается на две окружности - АВ и CD. Эти окружности проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде отрезков прямых линий, поскольку плоскость симметрии конической поверхности параллельна фронтальной плоскости проекций  $\Phi$ .

Попробуем определить - при каких условиях линия пересечения двух поверхностей второго порядка распадается на две плоские кривые второго порядка?

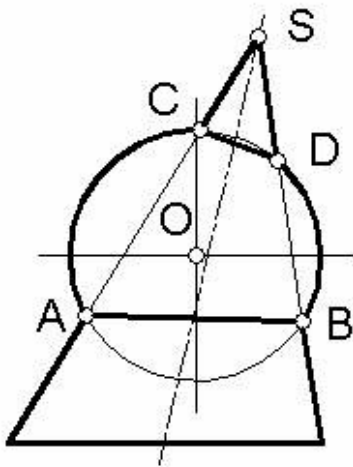


Рисунок 158

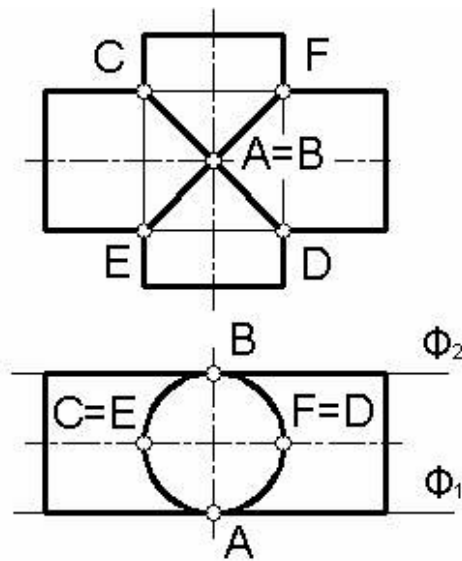


Рисунок 159

Известно, что если две поверхности имеют в некоторой их общей точке одну и ту же касательную плоскость, то они касаются друг друга в этой точке. Если же две пересекающиеся поверхности имеют две такие точки, то говорят, что они имеют **двойное прикосновение**.

**Линия пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих двойное прикосновение, распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки прикосновения (касания).**

Доказательство этого положения приведено в книге Н.Ф.Четверухина «Курс начертательной геометрии».

Приведем пример, иллюстрирующий вышесказанное.

**Пример 1.** Построить линию пересечения двух цилиндров вращения одинакового диаметра (рисунок 159).

Эти поверхности имеют двойное прикосновение в точках А и В, поскольку в указанных точках имеют общие касательные плоскости  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . По этой причине линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, которые должны проходить через точки А, В и точки С, D и Е, F пересечения контурных образующих цилиндров.

В этом случае линия пересечения будет представлять собой два одинаковых эллипса, большими осями которых будут отрезки CD и EF, а малыми – отрезок АВ. На фронтальной проекции (виде спереди) эти эллипсы проецируются в отрезки прямых, а на горизонтальной проекции (виде сверху) – в окружность, совпадающую с проекцией вертикально расположенного цилиндра.

Рассмотренное положение о двойном прикосновении поверхностей позволяет достаточно просто строить **круговые сечения** поверхностей второго порядка, если таковые у них имеются.

Для построения кругового сечения какой-либо поверхности нужно провести сферу, имеющую двойное прикосновение с этой поверхностью. Тогда линия их пересечения распадется на две плоские кривые. А поскольку эти кривые расположены на поверхности сферы, то они являются окружностями. Тем самым будут найдены круговые сечения заданной поверхности второго порядка.

Таким образом, **для построения круговых сечений поверхностей второго порядка необходимо провести сферу, имеющую двойное прикосновение с данной поверхностью. Линия их пересечения дает два круговых сечения данной поверхности.**

**Пример 2.** Построить круговые сечения эллиптического цилиндра (рисунок 160).

Из произвольной точки  $O$  оси цилиндра описываем сферу так, чтобы она касалась двух образующих цилиндра и пересекала бы его. Точки касания  $A$  и  $B$  будут точками прикосновения обеих поверхностей, так как через них можно провести общие касательные плоскости  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Поскольку имеем двойное прикосновение поверхностей

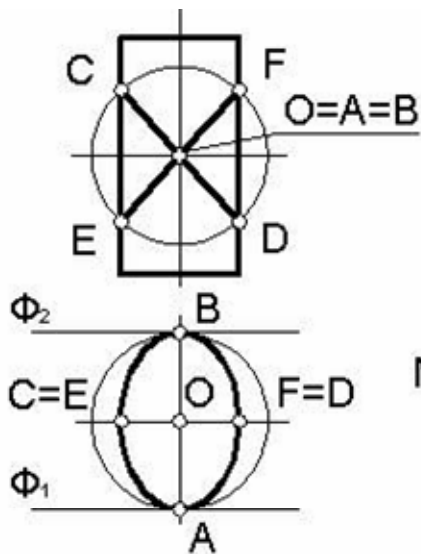


Рисунок 160

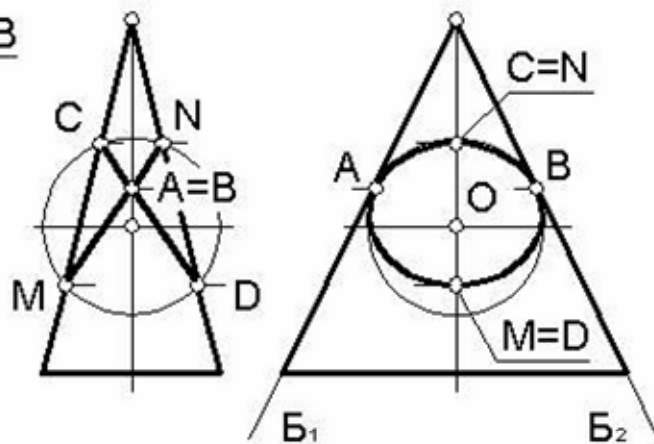


Рисунок 161

второго порядка, линия пересечения их распадается на две плоские кривые. В нашем примере это окружности  $CD$  и  $EF$ , находящиеся во фронтально проецирующих плоскостях. Любая линия поверхности цилиндра, параллельная указанным окружностям, также будет окружностью.

**Пример 3.** Построить круговые сечения эллиптического конуса (рисунок 161).

Из произвольной точки оси конуса  $O$  опишем сферу так, чтобы она имела двойное прикосновение с поверхностью конуса. В точках  $A$  и  $B$  у обеих поверхностей общие касательные плоскости  $B_1$  и  $B_2$ . В этом случае линия пересечения поверхностей распадается на две окружности  $CD$  и  $MN$ , расположенные во фронтально проецирующих плоскостях. Полученные круговые сечения входят в две группы круговых сечений конуса, плоскости других круговых сечений параллельны найденным.

Бывают случаи, когда не удастся непосредственно обнаружить двойное прикосновение у пересекающихся поверхностей. Тогда чтобы убедиться, что линия их пересечения распадается на плоские кривые, пользуются следующим положением, известным как **теорема Монжа** и вытекающем из положения о двойном прикосновении:

**если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка (или вписаны в нее), то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.**

Покажем применение теоремы Монжа при решении конкретных задач.

**Пример 4.** Построить линию пересечения конуса и цилиндра, описанных около одной и той же сферы (рисунок 162).

Сфера касается конической поверхности по окружности 1-2, а поверхности цилиндра по окружности 3-4. Точки  $A$  и  $B$  пересечения этих окружностей и будут точками двойного прикосновения данных поверхностей, так как в этих точках у конуса и цилиндра будут общие касательные плоскости.

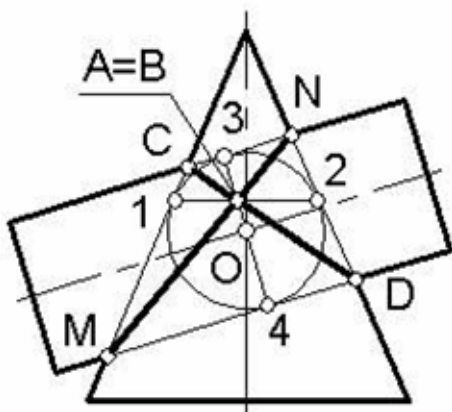


Рисунок 162

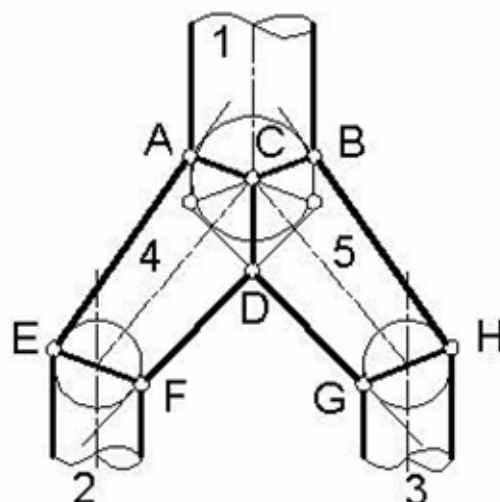


Рисунок 163

Поскольку имеем дело с двойным прикосновением поверхностей, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые

второго порядка. В нашем примере это два эллипса CD и MN, фронтальные проекции которых изображаются отрезками прямых.

**Пример 5.** Построить переходные конические поверхности для разветвления цилиндрического трубопровода 1 на две ветви 2 и 3 (рисунок 163).

Если вписать в каждую из трех труб сферы, то пары сфер 1-2 и 1-3 определяют переходные конические поверхности 4 и 5, касательные к этим сферам.

При построении линии пересечения трех цилиндрических труб и переходных поверхностей согласно теореме Монжа определяем, что искомые линии пересечения будут плоскими кривыми (эллипсами). Проекции этих эллипсов будут отрезками прямых, концы которых определяются точками пересечения очерковых образующих.

## ГЛАВА 8

### РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

---

#### 8.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О РАЗВЕРТЫВАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Будем считать, что поверхность представляет собой гибкую, но нерастяжимую оболочку. Если при этом можно разгибая, совместить ее с плоскостью **без разрывов и складок**, то такую поверхность называют **развертывающейся**. Фигура на плоскости, в которую преобразуется поверхность в результате такой процедуры, называется **разверткой поверхности**.

Нужно отметить, что не все поверхности допускают подобное преобразование. Ниже будет показано, какие типы поверхностей возможно совместить с плоскостью при помощи разгибания, без растяжения и сжатия.

Построение разверток поверхностей имеет практическое значение при конструировании изделий из листового материала. Это обшивки самолетов и судов, всевозможные резервуары и трубопроводы, изделия швейной и кожевенной промышленности. Часто на практике приходится изготавливать развертки (выкройки) не только для развертывающихся поверхностей, но и для тех поверхностей, которые считаются **не развертывающимися**. В этом случае не развертывающуюся поверхность разбивают на части, которые **приблизительно** заменяют развертывающимися поверхностями, и строят развертки этих частей.

Более строгое определение развертывающейся поверхности и ее развертки можно сформулировать так:

поверхность называется развертывающейся, если между точками поверхности и ее развертки можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняются длины линий, расположенных на поверхности, величины углов между линиями и площади фигур, ограниченных замкнутыми линиями.

На рисунке 164 показано, что длина дуги АВ поверхности равна длине дуги А\*В\* на развертке, угол  $\psi$  равен углу  $\psi^*$ , а площадь  $\Delta CDE$  на поверхности равна площади  $\Delta C^*D^*E^*$  на развертке. Указанные свойства вытекают из представления поверхности в виде нерастяжимой пленки, поэтому сохраняются все эти свойства.

Когда некоторой кривой линии MN на поверхности соответствует на развертке отрезок прямой M\*N\*, то кривая линия MN будет кратчайшей из всех линий на поверхности, проведенных между точ-

ками M и N. Такие кратчайшие линии на поверхности называют **геодезическими линиями**.

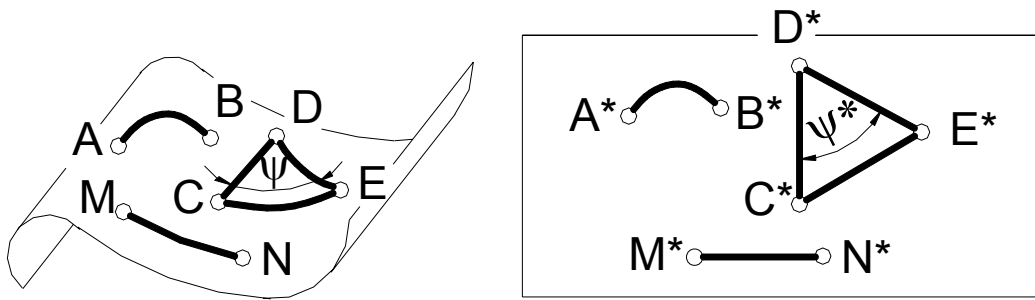


Рисунок 164

Отметим, какие поверхности относятся к числу развертываемых:

- **многогранные поверхности**. Разверткой многогранника является плоская фигура, которая получается последовательным совмещением с одной и той же плоскостью всех ее граней;
- те **линейчатые поверхности**, у которых касательная плоскость касается поверхности во всех точках ее прямолинейной образующей. Иными словами у развертываемой линейчатой поверхности касательная плоскость во всех точках одной и той же образующей постоянна. Если же у линейчатой поверхности в различных точках ее прямолинейной образующей разные касательные плоскости, то такая поверхность не развертывается и называется **косой поверхностью**.

Следовательно, к числу развертываемых поверхностей относятся (рисунок 165) **цилиндрические, конические и торсы**.

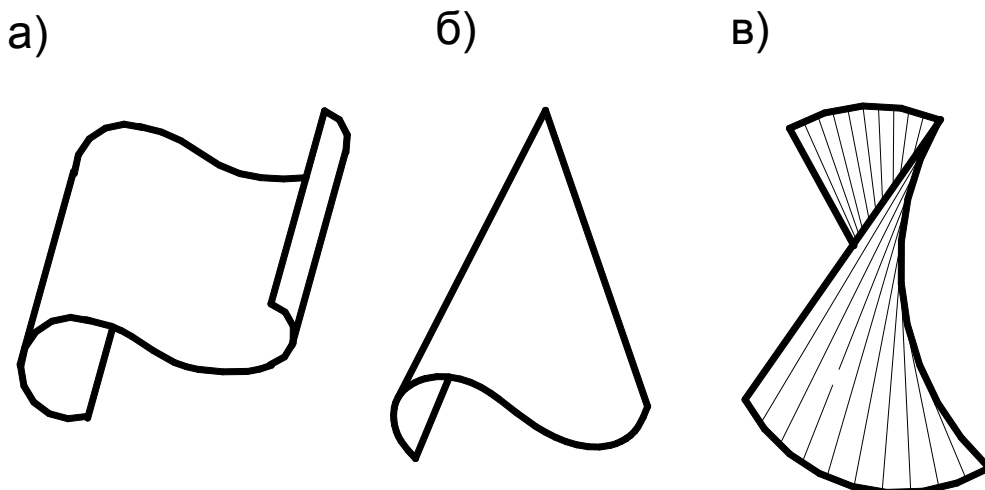


Рисунок 165

Для этих поверхностей строят **приближенные развертки**, поскольку поверхности в процессе построения развертки заменяются (аппроксимируются) вписанными или описанными многогранниками.

Точные развертки этих многогранных поверхностей и принимаются за приближенные развертки развертываемых поверхностей.

Все остальные кривые поверхности не развертываются на плоскость. При необходимости изготовления таких поверхностей из листового материала, их приближенно заменяют развертывающимися поверхностями и строят так называемые **условные развертки**.

## 8.2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗВЕРТОК

### 8.2.1. Способ треугольников (триангуляции)

Этим способом строят развертки **пирамидальных, конических и других линейчатых поверхностей**. Боковые грани не усеченной пирамиды изначально представляют собой треугольники, а коническая и торсовая поверхности заменяются вписанной (или описанной) в них многогранной поверхностью. Таким образом, построение разверток этих поверхностей приводит к многократному построению натурального вида треугольников, из которых состоят боковые грани указанных вписанных многогранников (рисунок 166 а,б).

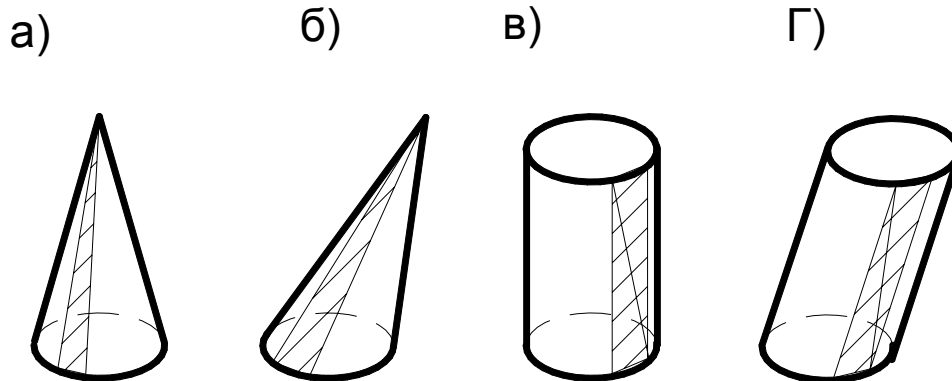


Рисунок 166

Способ триангуляции наиболее универсальный среди других способов, он пригоден для построения точных разверток любых многогранных поверхностей, а так же для построения приближенных и условных разверток линейчатых поверхностей. Этим способом можно построить развертки призматической и цилиндрической поверхностей, если разбить на треугольники их боковые грани, которые представляют собой прямоугольники (в случае *прямых* призмы или цилиндра, рисунок 166 в) или параллелограммы (в случае *наклонных* призмы или цилиндра, рисунок 166 г).

**Пример 1.** Построить полную развертку поверхности треугольной пирамиды  $SABC$ , нанести на развертку точку  $M$ , заданную своей фронтальной проекцией (рисунок 167).



Так как боковые грани пирамиды являются треугольниками, то необходимо построить натуральные виды этих треугольников. Для этого нужно предварительно определить натуральные величины боковых ребер пирамиды. Это можно сделать при помощи *способа прямоугольных треугольников*, в каждом из которых одним из катетов будет превышение вершины пирамиды  $S$  над точками  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а вторым катетом – отрезок, равный горизонтальной проекции соответствующего бокового ребра  $SA$ ,  $SB$  или  $SC$ .

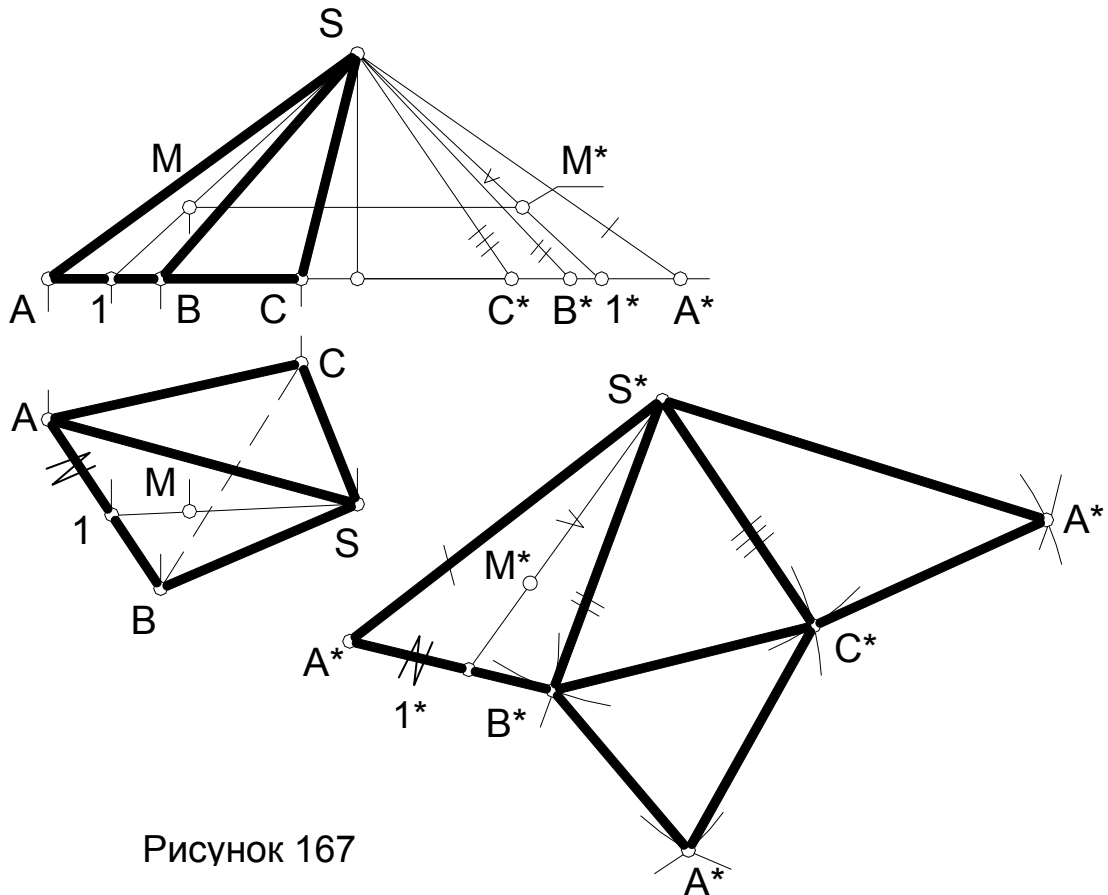


Рисунок 167

Поскольку основание пирамиды является горизонтальной плоскостью, то на виде сверху имеем его натуральную величину и величины его сторон можно измерить непосредственно на виде сверху (горизонтальной проекции).

Треугольник каждой боковой грани строится по трем сторонам. Развертка боковой поверхности пирамиды получается в виде трех примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной  $S^*$ . Теперь остается пристроить к развертке боковой поверхности треугольник  $A^*B^*C^*$  (по трем сторонам, измеренным на виде сверху), являющийся натуральным видом основания пирамиды.

Для нанесения на развертку точки  $M$ , сначала достроим ее горизонтальную проекцию. С этой целью «привяжем» точку  $M$  к поверхности пирамиды отрезком  $S1$ , на горизонтальной проекции ко-

того и определится горизонтальная проекция точки  $M$ . Построим на развертке указанный отрезок  $S1$ , для чего измерим расстояние от точки  $A$  основания пирамиды до точки  $1$  на виде сверху (горизонтальной проекции). Отложив полученную величину на развертке, получим положение точки  $1^*$  на отрезке  $A^*B^*$  боковой грани пирамиды. Чтобы найти точку  $M^*$  на отрезке  $S^*1^*$ , предварительно определим его натуральную величину тем же способом прямоугольного треугольника. Расстояние от вершины  $S$  пирамиды до точки  $M$  находим переносом фронтальной проекции точки на натуральную величину  $S^*1^*$ . Отложив на развертке вдоль отрезка  $S^*1^*$  величину  $S^*M^*$ , находим положение точки  $M$  на развертке.

После построения развертки боковой поверхности пирамиды следует пристроить к ней треугольник основания  $A^*B^*C^*$ .

**Пример 2.** Построить развертку боковой поверхности эллиптического конуса с круговым основанием и нанести на развертку точку  $M$ , принадлежащую поверхности конуса, (рисунок 168).

Как указывалось ранее, коническая поверхность заменяется поверхностью вписанной двенадцати угольной пирамиды. Учитывая,

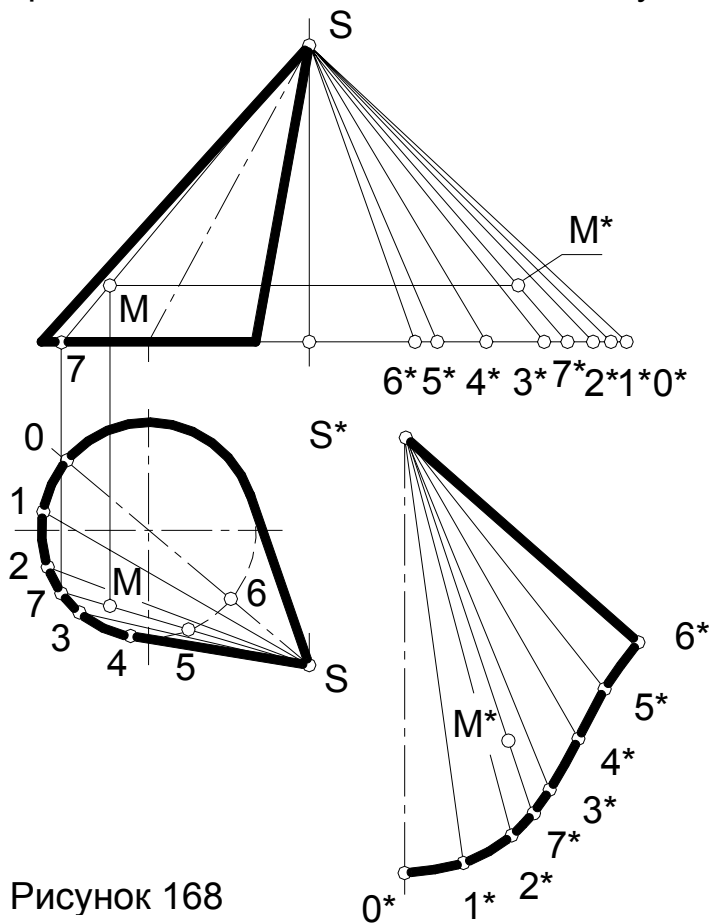


Рисунок 168

что данная поверхность имеет плоскость симметрии, можно построить развертку только одной половины поверхности.

Разделив от точки  $O$  (лежащей в плоскости симметрии поверхности) половину окружности основания конической поверхности на шесть равных частей, проведем шесть образующих конуса. Далее при помощи способа прямоугольных треугольников определим натуральные величины этих образующих. Теперь остается построить шесть примыкающих друг к другу

треугольников с общей вершиной  $S^*$ . Каждый из этих треугольников строится по трем известным сторонам: две стороны равны натуральным величинам образующих, а третья – хорде, стяги-

вающей дугу окружности основания между соседними точками деления. Теперь остается провести плавную кривую через точки  $0^*$ ,  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ ,  $4^*$ ,  $5^*$  и  $6^*$  разогнутого основания конической поверхности.

Для нанесения точки  $M$  на развертку, нужно предварительно определить натуральную величину образующей  $S-7$ , на которой эта точка лежит. После этого построим точку  $M^*$  на этой гипотенузе прямоугольного треугольника  $S-7^*$ . Затем проводим на развертке образующую  $S^*-7^*$ , определив точку  $7^*$ , для чего измерим на виде сверху расстояние до нее от ближайшей точки деления основания конуса (в нашем случае это  $2-7=2^*-7^*$ ). В заключении остается отложить на образующей  $S^*-7^*$  расстояние от вершины конуса  $S^*$  до точки  $M^*$ , измеренное на гипотенузе прямоугольного треугольника  $S-7^*$ .

**Пример 3.** На поверхности прямого кругового конуса провести геодезическую линию между ее точками  $A$  и  $B$  (рисунок 169).

Для проведения геодезической линии, необходимо предварительно построить развертку боковой поверхности конуса. Разверткой в этом случае является круговой сектор, радиус которого равен натуральной величине образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса.

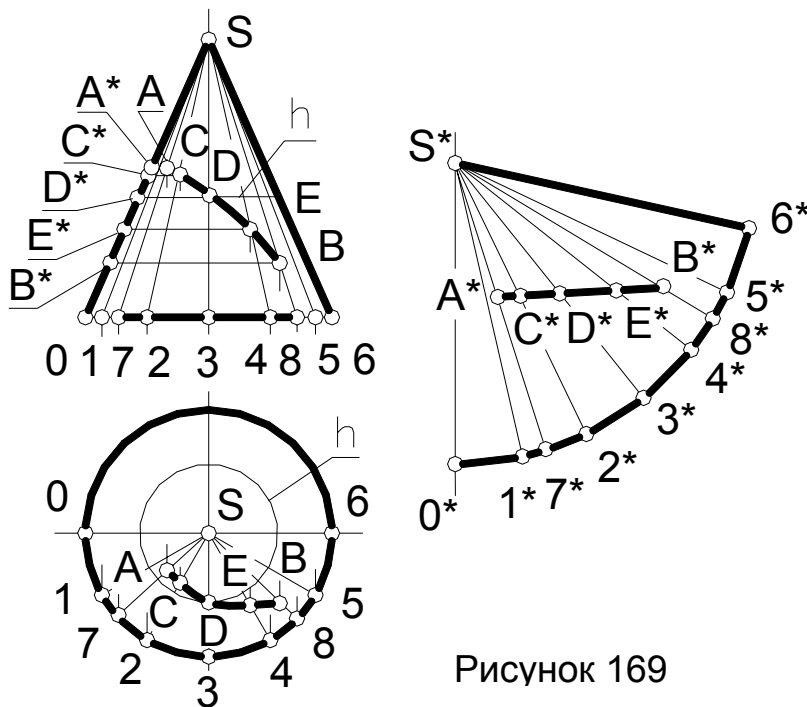


Рисунок 169

На практике развертку строят обычным способом: заменяют коническую поверхность вписанной пирамидой, и длину дуги сектора определяют при помощи ее хорд, принимая их равными дугам, стягивающим дуги основания конуса.

Поскольку точки  $A$  и  $B$  расположены на передней половине поверхности

конуса, то будем строить только развертку этой половины поверхности. Для этого разделим переднюю половину основания конуса на шесть равных частей точками  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ ,  $5$  и  $6$  и проведем через полученные точки образующие конуса  $S-1$ ,  $S-2$  и т.д. Проведем также образующие  $S-7$  и  $S-8$  через точки  $A$  и  $B$ .

На очерковой образующей  $S-0$ , являющейся натуральной величиной образующих конуса, определим натуральные величины  $S^*-A^*$  и  $S^*-B^*$  расстояний точек  $A$  и  $B$  от вершины конуса  $S$ .

Построим половину развертки поверхности конуса пристроив друг к другу шесть одинаковых равнобедренных треугольников, сторонами которых являются образующая конуса  $S-0$  и хорды, стягивающие точки деления основания конуса  $0-1=1-2=2-3$  и т.д.

При помощи образующих  $S^*-7^*$  и  $S^*-8^*$  находим на развертке точки  $A^*$  и  $B^*$ , которые соединяем прямой линией. Если теперь отметить на отрезке  $A^*B^*$  точки  $C^*$ ,  $D^*$  и  $E^*$  пересечения его с образующими  $S^*-2^*$ ,  $S^*-3^*$  и  $S^*-4^*$ , то при помощи этих точек можно построить искомую геодезическую линию. Для этого предварительно построим на очерковой образующей конуса  $S-0$  вспомогательные точки  $C^*$ ,  $D^*$  и  $E^*$ , расстояния до которых от вершины конуса измерены на соответствующих образующих на развертке конуса. После построения вспомогательных точек переносим их на соответствующие образующие  $S-2$ ,  $S-3$  и  $S-4$ . Проведя плавную кривую через точки  $A-C-D-E-B$ , получаем фронтальную проекцию искомой геодезической линии.

При построении горизонтальной проекции (вида сверху) геодезической линии затруднение может вызвать построение точки  $D$ , лежащей на профильной образующей  $S-3$ . Можно рекомендовать использовать для нахождения этой точки параллель конуса  $h$ , являющуюся окружностью.

**Пример 4.** Построить развертку поверхности цилиндриды, направляющими которого являются две окружности одинакового диаметра, а плоскостью параллелизма – фронтальная плоскость  $\Phi$  (рисунок 170).

Учитывая, что данная поверхность имеет плоскость симметрии (параллельную фронтальной плоскости проекций), можно ограничиться построением развертки только одной половины поверхности.

Заменяем указанную поверхность вписанным многогранником, поверхность которого состоит из треугольников. С этой целью проведем образующие  $0-7$ ,  $1-8$ ,  $2-9$ ,  $3-10$  и т.д., которые являются фронталями. Концы образующих горизонтальной окружности ( $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $4$ ,  $5$  и  $6$ ) находим делением половины этой окружности на шесть равных частей, а концы образующих ( $7$ ,  $8$ ,  $9$ ,  $10$ ,  $11$ ,  $12$  и  $13$ ) на профильной окружности – с помощью половины ее вида слева (половины ее профильной проекции). Теперь каждый элемент поверхности, ограниченный параллельными смежными образующими, разделим на два треугольника. Например элемент поверхности, ограниченный образующими  $0-7$  и  $1-8$ , разделим на треугольники  $0-7-$

8 и 0-1-8, элемент между образующими 1-8 и 2-9 на треугольники 1-8-9 и 1-9-2 и т.д.

Для нахождения натуральных видов этих треугольников по трем

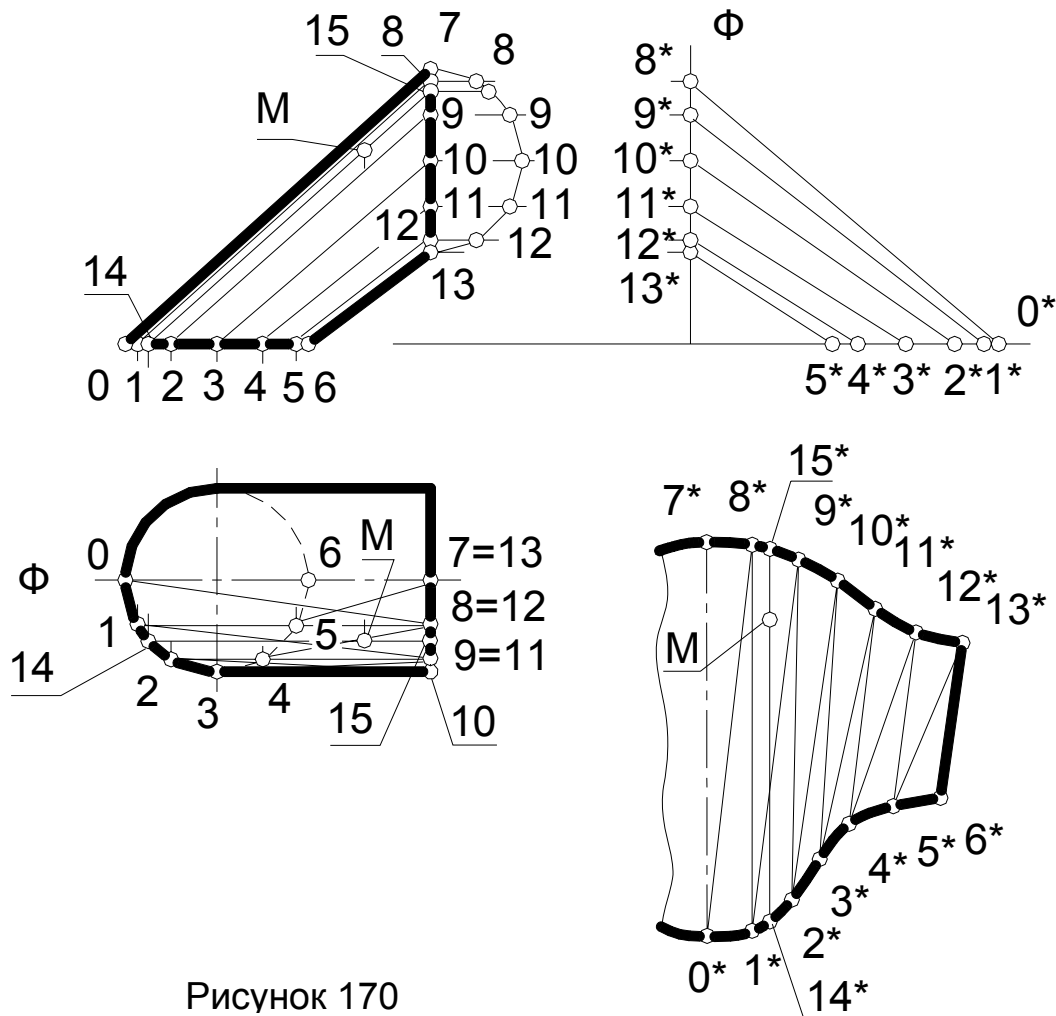


Рисунок 170

сторонам определим натуры тех отрезков, для которых ее нет на чертеже – 0-8, 1-9, 2-10, 3-11, 4-12 и 5-13. Натуру отрезков определяем способом прямоугольного треугольника. Стороны треугольников многогранной поверхности, лежащие на окружностях, принимаем равными стягивающим их хордам. Имея сведения о величинах сторон треугольников, начинаем построение развертки с треугольника 0-7-8. Затем пристраиваем к нему следующий треугольник – 0-1-8. Далее треугольники 1-8-9, 1-2-9, 2-9-10, 2-3-10 и т.д. (см. рисунок 170). Построив натуральные виды всех треугольников, и проведя через их вершины плавные кривые, получим приближенную развертку поверхности цилиндроида.

Для нахождения на развертке некоторой точки М, принадлежащей поверхности цилиндроида, необходимо провести на развертке прямую, соответствующую той образующей, на которой находится точка М. В нашем примере проведена прямая 14\*-15\*, соответст-

вующая образующей 14-15. Затем на этой прямой откладываем расстояние от плавной кривой линии развертки до точки М, измеренное на виде спереди (фронтальной проекции), например  $15^*-M=15-M$ .

### 8.2.2. Способ «нормального» сечения

Способом «нормального» сечения строятся развертки **призматических и цилиндрических** поверхностей. Построение разверток приводит, в общем случае, к многократному построению натурального вида **трапеций**, из которых состоит боковая поверхность призмы или призматическая поверхность вписанная (описанная) в цилиндрическую и заменяющая ее. Если призматическая или цилиндрическая поверхность ограничены параллельными основаниями, то боковые грани будут представлены **параллелограммами** или **прямоугольниками**, в зависимости от того, перпендикулярны или нет боковые ребра или образующие поверхности плоскостям оснований.

Построение трапеций или параллелограммов можно производить различными способами. Например, можно разбить их на треугольники, определить натуральную величину этих треугольников, и, пристроив один треугольник к другому, получить натуральную величину трапеции (параллелограмма).

Однако проще всего построить натуральные величины трапеций или параллелограммов по их основаниям и высотам. При этом необходимо знать отрезки **a, b, c, d** оснований, на которые они делятся высотой **e** (рисунок 171).



Рисунок 171

В случае цилиндрической поверхности высотами будут хорды, стягивающие дуги «нормального» сечения, на которые разбивают кривую, ограничивающую это сечение.

**Пример 1.** Построить полную развертку поверхности треугольной призмы  $ABCDEF$  и нанести на развертку точку  $M$ , принадлежащую поверхности (рисунок 172).

Пусть призма расположена так, что ее боковые ребра являются фронталями и проецируются на виде спереди (фронтальной проекции) в натуральную величину.

В произвольном месте разрежем призму фронтально проецирующей плоскостью  $B$ , перпендикулярной («нормальной») ее ребрам. Построив натуральный вид 1-2-3 этого сечения, находим натуральные величины 1-2, 2-3 и 3-1 высот параллелограммов, из которых состоит боковая поверхность призмы.

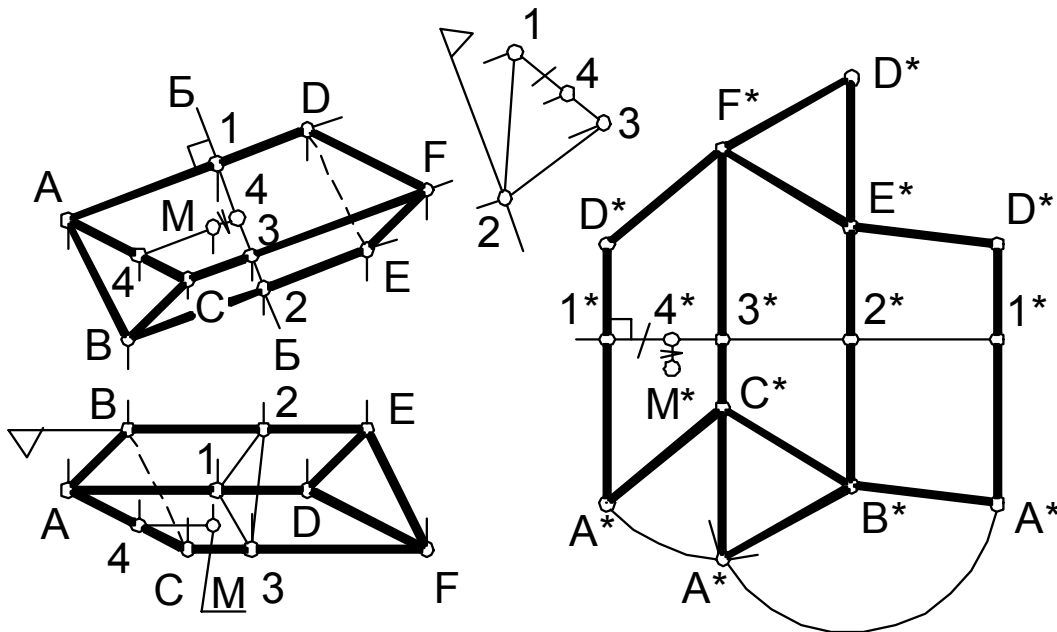


Рисунок 172

Поскольку боковые ребра призмы параллельны между собой, а стороны «нормального» сечения им перпендикулярны, то из свойства сохранения углов на развертке следует, что на развертке боковые ребра так же будут параллельны между собой, а стороны «нормального» сечения, будучи перпендикулярными им, развернутся в прямую линию.

Для построения развертки нужно на произвольной прямой (в нашем примере – горизонтальной) отложить натуральные величины 1-2, 2-3 и 3-1 сторон «нормального» сечения. Через полученные точки  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$  и  $1^*$  проведем прямые, перпендикулярные к прямой «нормального» сечения. Теперь отложим на этих перпендикулярах по обе стороны от прямой  $1^*-2^*-3^*-1^*$  отрезки, на которые делятся боковые ребра призмы секущей плоскостью  $B$ . Соединяя отрезками прямых полученные точки  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$ ,  $E^*$  и  $F^*$ , получим развертку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания-

треугольника, построенные по трем известным сторонам, получим полную развертку призмы.

Для построения на развертке некоторой точки  $M$ , принадлежащей поверхности призмы, нужно отложить на прямой  $1^*-2^*-3^*-1^*$  отрезок  $1^*-4^*=1-4$ . Затем через точку  $4^*$  провести прямую, параллельную боковым ребрам и на этой прямой отложить отрезок  $4^*-M^*=4-M$ .

Если бы боковые ребра призмы не были прямыми уровня, как в нашем примере, то нужно было бы предварительно преобразовать чертеж так, чтобы они стали прямыми уровня.

**Пример 2.** Построить развертку боковой поверхности эллиптического цилиндра (рисунок 173).

Несмотря на то, что цилиндрические поверхности являются развертываемыми, практически строят их приближенные развертки, заменяя цилиндр вписанной призматической поверхностью.

В нашем примере поверхность имеет фронтальную плоскость симметрии, что позволяет построить развертку только половины поверхности.

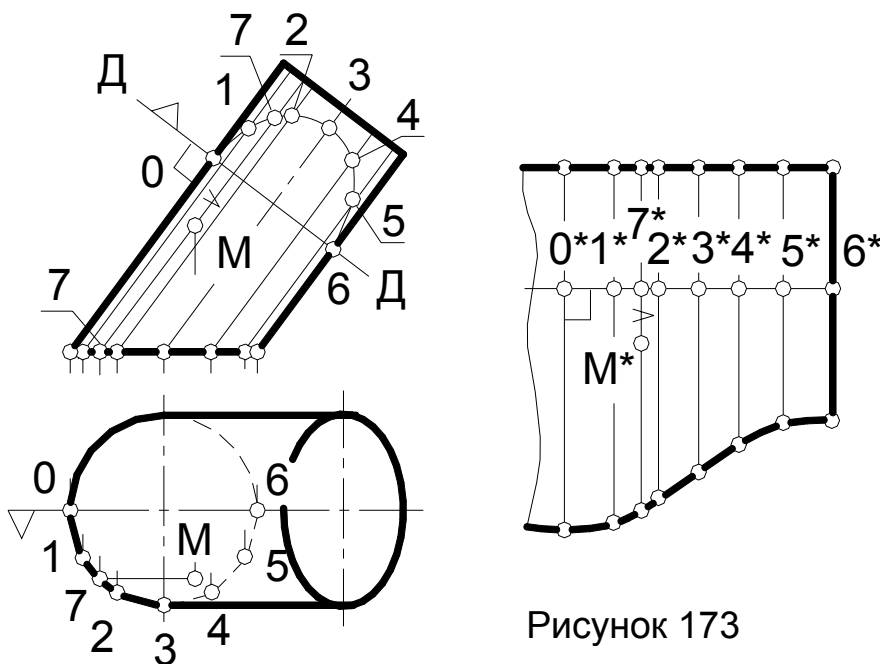


Рисунок 173

Для построения «нормального» сечения, проведем фронтально проецирующую плоскость  $D$  перпендикулярно образующим цилиндрической поверхности. При помощи построения дополнительного вида определим натуральный вид

половины «нормального» сечения цилиндрической поверхности. Разделив на шесть равных частей половину горизонтального основания цилиндра, перенесем полученные точки на дугу полуэллипса, являющегося половиной «нормального» сечения.

Проведем на поверхности цилиндра образующие, соответствующие точкам деления «нормального» сечения. При этом поверхность половины цилиндра разобьется на шесть трапеций, поскольку плоскости оснований не параллельны между собой. Основаниями трапеций будут образующие (натуральные величины которых име-



ются на виде спереди), а высотами – хорды, стягивающие дуги полу эллипса «нормального» сечения.

Дальнейшее построение развертки производится так же, как и в предыдущем примере, только вершины построенных на развертке трапеций соединяем не отрезками прямых, а плавными кривыми. Одна из этих кривых в нашем примере является прямой линией, так как наклонное основание цилиндра перпендикулярно его образующим.

Для построения на развертке некоторой точки  $M$ , принадлежащей поверхности цилиндра, нужно провести на поверхности через эту точку вспомогательную образующую. Затем построить соответствующую ей образующую на развертке и на ней отложить от линии сечения расстояние до точки  $M$ . При этом  $7^*-M^*=7-M$ .

**Пример 3.** Построить развертку цилиндрического трубопровода кругового сечения, состоящего из трех элементов, расположенных параллельно фронтальной плоскости (рисунок 174).

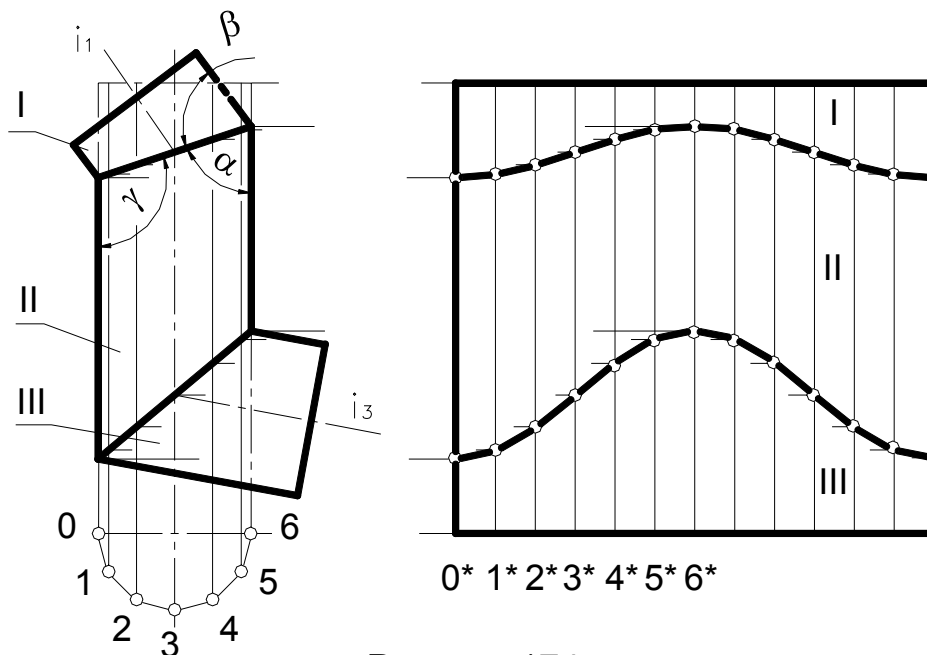


Рисунок 174

Для более рационального использования листового материала, из которого будет изготавливаться развертка, сделаем следующее. Мысленно отделим элементы I и III от элемента II и повернем их относительно своих осей  $i_1$  и  $i_3$  на  $180^\circ$ . Если теперь приставить обратно элементы I и III так, чтобы совпали эллипсы, по которым пересекаются эти элементы, то все три элемента составят один цилиндр (изображенный штрих пунктирной линией), на поверхности которого проведены два эллипса.

Справедливость вышесказанного доказать несложно. На самом деле  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ , но  $\alpha = \beta$  ввиду равенства диаметров труб, поэтому  $\beta + \gamma = 180^\circ$ .

Таким образом нужно построить развертку спрямленной трубы в виде прямоугольника и нанести на нее точки принадлежащие эллипсам, которые затем соединить плавными кривыми линиями.

В случае, когда оси отдельных элементов трубопровода расположены не в одной плоскости (как в данном примере), развертка строится аналогично приведенному примеру.

### 8.2.3. Построение условных разверток не развертывающихся поверхностей

Чаще всего в технической практике приходится строить развертки поверхностей вращения. Построение разверток развертывающихся поверхностей вращения было рассмотрено выше. Поэтому здесь рассмотрим построение разверток для тех поверхностей, которые считаются не развертывающимися.

Способ построения разверток таких поверхностей состоит в том, что поверхность разбивается меридианами на сравнительно узкие и равные между собой части. Каждую такую часть заменяют описанной цилиндрической поверхностью, касающейся данной поверхности в точках среднего меридиана отдельной части. Указанный средний меридиан будет вместе с тем «нормальным» сечением цилиндрической поверхности. Границами цилиндрической поверхности каждой отдельной части будут плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемую часть.

**Пример 1.** Построить развертку поверхности сферы (рисунок 175).

Разобъем сферу при помощи меридианов на шесть равных частей (для более точной развертки желательно не менее 12-и).

Рассмотрим построение приближенной развертки одной такой части (доли) сферы. Средним меридианом здесь является главный меридиан  $f$ . Заменяем эту часть сферы цилиндрической поверхностью, описанной возле сферы. Образующие цилиндрической поверхности будут фронтально проецирующими прямыми и поэтому на виде сверху (горизонтальной проекции) проецируются в натуральную величину. «Нормальным» сечением цилиндрической поверхности будет главный меридиан  $f$ , а границами поверхности будут плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемую часть сферы.

Для построения развертки этой цилиндрической поверхности заменим ее вписанной призматической поверхностью. Для этого

разделим половину главного меридиана  $f$  на шесть равных частей, и через точки деления проведем образующие цилиндрической поверхности. Если мы теперь «разогнем» спрямляя полумеридиан в прямую линию, то получим развертку одной части (доли) сферы. Для этого проведем вертикальную прямую и от произвольной ее точки  $O$  отложим шесть одинаковых отрезков, равных по величине хордам, стягивающим дуги между точками деления полумеридиана  $0-1=1-2=2-3$  и т.д.. Через полученные точки проведем прямые перпендикулярные вертикальной прямой. Отложим в разные стороны от вертикальной прямой (спрямленного главного полумеридиана) половины отрезков  $A^*B^*=AB$ ,  $C^*D^*=CD$ ,  $E^*F^*=EF$  и т.д., поскольку главный меридиан делит эти отрезки пополам. Соединив полученные концы образующих плавными кривыми, получим приближенную развертку одной доли (1/6 части) поверхности сферы.

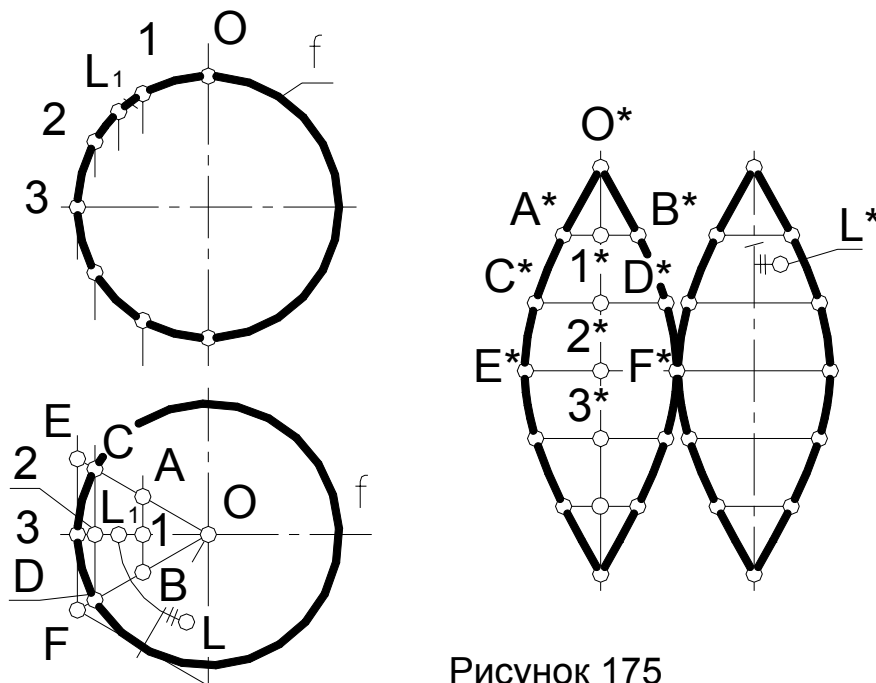


Рисунок 175

Для нанесения на развертку некоторой точки  $L$ , принадлежащей поверхности сферы, предварительно повернем ее до совмещения с главным меридианом  $f$  (точка  $L_1$ ), чтобы измерить на виде спереди (фронтальной проекции) расстояние от повернутого положения точки

$L_1$  до ближайшего деления меридиана ( $L_1-1$ ). Расстояние от точки  $L$  до среднего меридиана доли, в которой она находится, измеряется на виде сверху (горизонтальной проекции). При помощи этих двух расстояний строим на развертке нужной доли точку  $L^*$ , соответствующую точке  $L$ .

Для построения на развертке сферы некоторой линии, достаточно построить точки этой линии лежащие на крайних и среднем меридианах каждой доли, в которых лежит указанная линия.

**Пример 2.** Построить развертку поверхности открытого тора (кольца, рисунок 176).

Разобьем поверхность тора на шесть (лучше не менее 12-и) равных частей и построим приближенную развертку одной части. Заменяем поверхность этой части описанной цилиндрической поверхностью, нормальным сечением которой будет средний меридиан рассматриваемой части тора. Разделим средний меридиан на двенадцать равных частей.

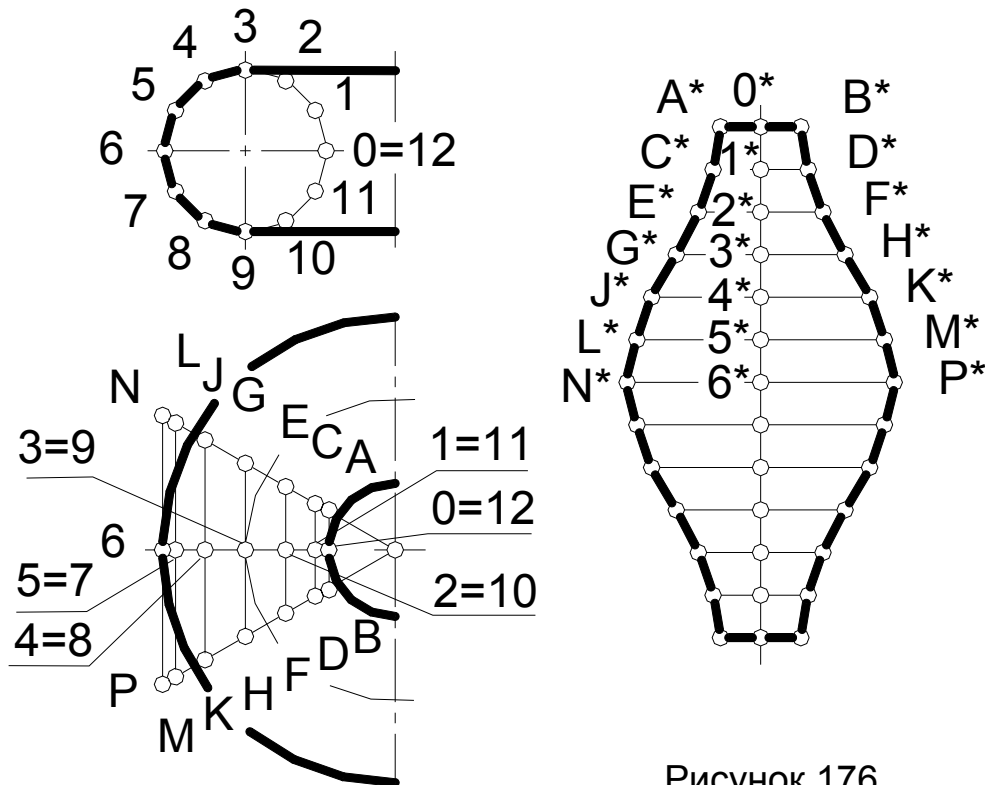


Рисунок 176

Спрявим этот меридиан в отрезок прямой линии и через точки деления проведем перпендикулярно к нему образующие цилиндрической поверхности. Отложим на образующих от среднего меридиана половины соответствующих им длин. Соединяя концы образующих плавными кривыми, получим приближенную развертку 1/6 части поверхности тора

Нанесение на развертку точки, принадлежащей поверхности тора, производится аналогично случаю нанесения точки на развертку сферы, рассмотренному выше.

**Пример 3.** Построить развертку части вентиляционного воздухопровода, служащего соединительным элементом между цилиндрической и квадратной его частями (рисунок 177).

Данная поверхность состоит из двух конических поверхностей I, двух конических поверхностей II, двух плоских треугольников III и плоских треугольников IV и V.

Плоские треугольники построим по трем известным сторонам, а конические поверхности заменим вписанными пирамидами, боковые грани которых состоят из треугольников. Для их построения необходимо предварительно определить натуральные величины образующих этих конических поверхностей I и II. Рядом с основными видами выполнен вспомогательный чертеж, на котором при помощи способа прямоугольного треугольника построены натуральные величины этих образующих (ребер вписанной пирамиды).

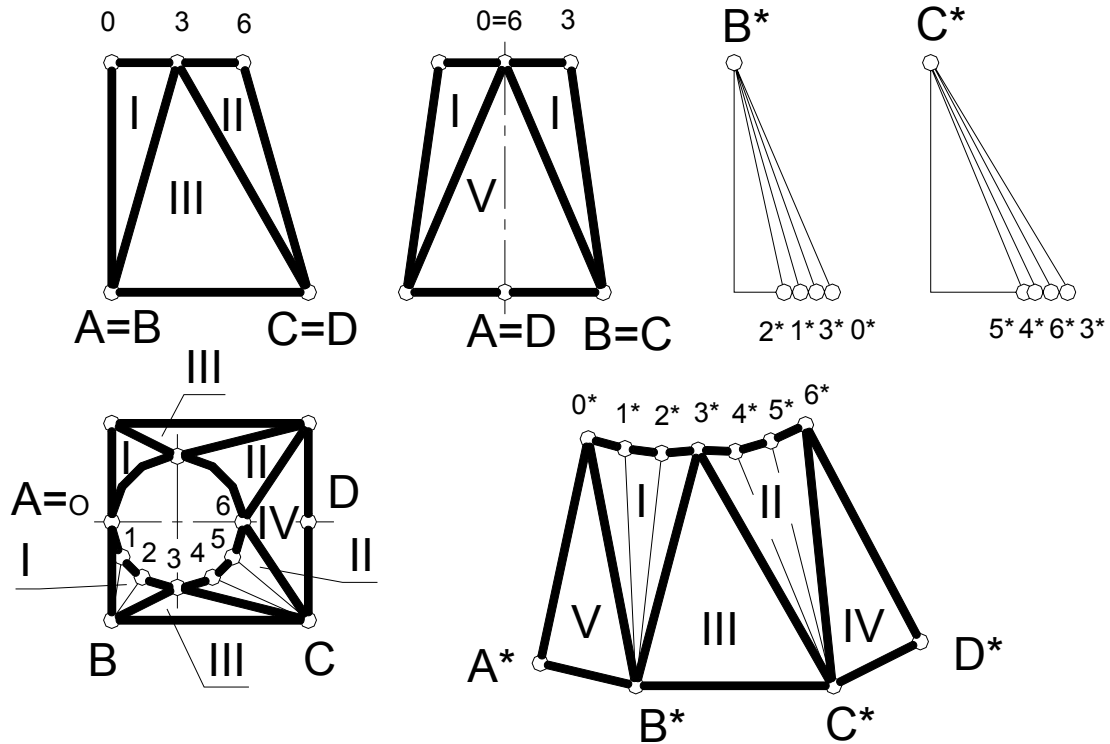


Рисунок 177

Теперь строим развертки конических поверхностей I и II, а между ними в определенной последовательности развертки треугольников III, IV и V. Полученная развертка является половиной развертки данной поверхности, имеющей фронтальную плоскость симметрии.

## ГЛАВА 9

### АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

#### 9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОМ ПРОЕКЦИРОВАНИИ

##### 9.1.1. Основные понятия и определения

При выполнении технических чертежей, наряду с комплексным чертежом данного оригинала часто выполняют и более наглядное его изображение, обладающее свойством обратимости. При этом применяют чертеж, состоящий только из одной параллельной проекции данного оригинала, дополненный проекцией пространственной системы координат, к которой предварительно был отнесен данный оригинал. Такой способ получения обратимого одно-проекционного чертежа называется **аксонометрическим способом**.

Слово **аксонометрия** означает буквально **осе измерение**. Действительно, построение аксонометрических проекций сводится к применению координатного способа на проекционном чертеже. При этом приходится производить измерения по координатным осям. Отсюда и получил свое название рассматриваемый способ.

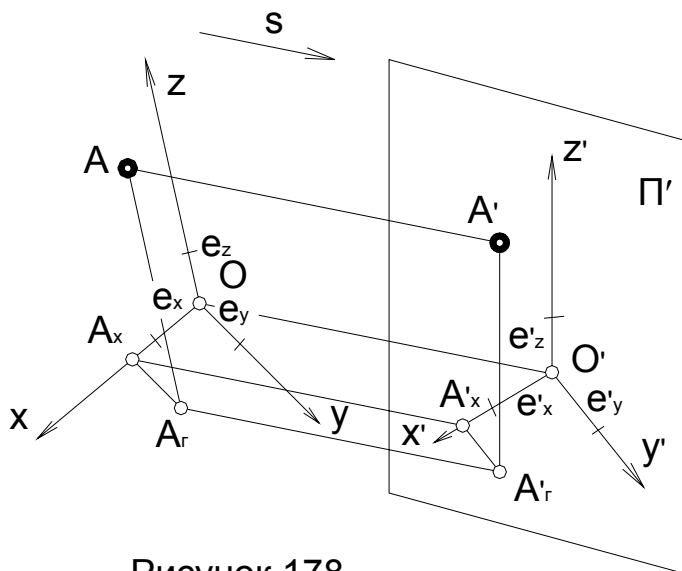


Рисунок 178

На рисунке 178 показано построение аксонометрической проекции на **картинную плоскость**  $\Pi'$  некоторой точки  $A$  вместе с пространственной (декартовой) системой координат  $Oxyz$ , к которой отнесена в пространстве эта точка  $A$ . Проецирование осуществляется параллельно заданному направлению  $s$ .

Дадим определение полученных при этом проекций.

Проекция точки  $A$  на картинную плоскость  $\Pi'$  называется аксонометрической проекцией (или **аксонометрией**) **точки  $A$**  и обозначается  $A'$ .

Проекции **натуральных координатных осей**  $x$ ,  $y$  и  $z$  на картинную плоскость  $\Pi'$  называются аксонометрическими осями или **осями аксонометрических координат** и обозначаются  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ . Точка  $O'$  называется **аксонометрическим началом координат**.

Проекция точки  $A_{\Gamma}$  (горизонтальной проекции точки  $A$ ) на картинную плоскость  $\Pi'$  называется аксонометрической проекцией точки  $A_{\Gamma}$  или **вторичной горизонтальной проекцией точки  $A$**  и обозначается  $A'_{\Gamma}$  (аналогично могут быть получены вторичные фронтальная и профильная проекции точки  $A$ ).

**Натуральные координаты** точки  $A$  в пространственной системе координат  $Oxyz$  определяются отрезками прямых, отложенных на соответствующих осях:

$$X_A = OA_x ; Y_A = OA_y ; Z_A = OA_z.$$

Проекции натуральных координат точки  $A$  на картинную плоскость  $\Pi$  называются **аксонометрическими координатами** точки  $A$  и обозначаются:

$$X'_A = O'A'_x ; Y'_A = O'A'_y ; Z'_A = O'A'_z.$$

Отложим на осях  $x$ ,  $y$  и  $z$  натуральной системы координат равные отрезки  $e_x=e_y=e_z=e$ . Величину этого отрезка примем за единицу длины и будем называть **натуральным масштабом**.

Проекции натурального масштаба на картинную плоскость  $\Pi'$  называются **аксонометрическими масштабами** вдоль аксонометрических осей  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  и обозначаются соответственно  $e'_x$ ,  $e'_y$  и  $e'_z$ .

### 9.1.2. Показатели искажения по аксонометрическим осям. Виды аксонометрии

При некотором произвольном положении натуральной системы координат относительно картинной плоскости  $\Pi'$  координаты точки  $A$  на эту плоскость будут проецироваться с искажениями.

Отношения аксонометрических координат точки  $A'$  к соответствующим натуральным координатам точки  $A$  называются **показателями** или **коэффициентами искажения** по осям. Обозначив через  $u$  показатель искажения по оси  $x$ ,  $v$ - показатель искажения по оси  $y$ , а через  $w$ - показатель искажения по оси  $z$ , можно записать:

$$u = x'_A / x_A ; v = y'_A / y_A ; w = z'_A / z_A. \quad (1)$$

Величину показателей искажения можно определить и как отношение аксонометрического масштаба к натуральному:

$$u = e'_x / e_x ; v = e'_y / e_y ; w = e'_z / e_z.$$

На практике построение аксонометрического чертежа производится не по аксонометрическим масштабам, а по известным показателям искажения  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Например, для построения аксонометрического чертежа точки  $A$  ее «относят» к натуральной системе координат и определяют ее *натуральные* координаты. Имея показатели искажения по осям, можно при помощи соотношений (1) найти ее *аксонометрические* координаты:

$$x' = ux ; y' = vy ; z' = wz.$$

Затем строим на чертеже аксонометрические оси координат, и по полученным аксонометрическим координатам определяем положение точки  $A'$  в аксонометрической системе координат  $O'x'y'z'$ .

*В зависимости от направления проецирования* аксонометрические проекции можно разделить на две группы:

- **прямоугольные** аксонометрические проекции, полученные при ортогональном проецировании на картинную плоскость ( $s \perp \Pi'$ );
- **косоугольные** аксонометрические проекции, полученные при направлении проецирования под острым углом к картинной плоскости.

*В зависимости от соотношения показателей искажения по осям* различают три группы аксонометрических проекций:

- **изометрия** – если все три показателя искажений по осям равны между собой:  $u = v = w$ ;
- **диметрия** – если два показателя искажения равны между собой и отличаются от третьего показателя:  $u = v \neq w$ , или  $v = w \neq u$ , или  $w = u \neq v$ ;
- **триметрия** – если все показатели искажения по осям различны:  $u \neq v$ ,  $v \neq w$ ,  $w \neq u$ .

### 9.1.3. Основное предложение аксонометрии

Принимая различные положения натуральной системы координат относительно картинной плоскости  $\Pi'$ , и выбирая произвольные направления проецирования  $s$ , можно получить множество аксонометрических изображений одного и того же оригинала, которые будут отличаться направлениями аксонометрических осей и показателями искажения по этим осям.

Немецким ученым-геометром Польке в 1851 году была доказана теорема, которая утверждает, что *три отрезка прямых произвольной длины (лежащие в одной плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу) представляют параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на прямоугольных координатных осях от начала координат  $O$ .*



Основываясь на этом можно произвольно выбирать направление аксонометрических осей и показатели искажения по ним.

В 1863 году геометр Г.Шварц сформулировал более общую теорему (теорема Польке-Шварца), которая утверждает, что *всякий «невыврожденный» четырехугольник и его диагонали можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра наперед заданной формы.*

Эта теорема позволила установить зависимость между углом проецирования и величиной показателей искажения по аксонометрическим осям:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg} \varphi ,$$

где  $\varphi$  - угол наклона направления проецирования  $\mathbf{s}$  к картинной плоскости  $\Pi'$ .

Для прямоугольной аксонометрической проекции  $\varphi=90^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} \varphi=0$ , следовательно  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ .

Пользуясь этой формулой, можно определить показатели искажения по аксонометрическим осям для прямоугольных изометрической и диметрической проекций.

В изометрии  $u = v = w$ , поэтому

$$3u^2=2; \quad u=\sqrt{2/3} \approx 0,82.$$

В диметрии  $u = v \neq w$ , причем принято, что  $w=0.5 u$  (т.е. размеры по оси  $u$  уменьшаются в два раза), поэтому

$$2u^2 + 0.25u = 2; \quad u = \sqrt{2.25} \approx 0.47.$$

Таким образом **действительные показатели искажения в прямоугольной изометрии по всем осям равны  $u=0,82$ .**

**В прямоугольной диметрии действительные показатели искажения по осям  $x$  и  $z$  равны  $u = w = 0.94$ , а по оси  $y$   $v = 0.47$ .**

Следовательно, если заданы система аксонометрических осей  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  и показатели искажения по ним  $u$ ,  $v$  и  $w$ , то можно построить изображение любого оригинала по его ортогональным проекциям.

Рассмотрим пример построения *произвольной* аксонометрии.

**Пример 1.** Построить аксонометрическую проекцию отрезка АВ, заданного своим комплексным чертежом (рисунок 179а).

Чтобы «отнести» отрезок АВ к натуральной системе координат зададим на комплексном чертеже отрезка проекции координатных осей (рисунок 179б). Измеряя натуральным масштабом  $e=1\text{мм}$  координаты точек А и В получим, например, следующие натуральные координаты точек :

$$x_A = 30; y_A = 10; z_A = 35; x_B = 15; y_B = 30; z_B = 12.$$

Построим аксонометрическую систему координат, для чего на основании теоремы Польке проводим три произвольные прямые  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ , пересекающиеся в точке  $O'$  (рисунок 179в).

Выберем показатели искажения по осям. Пусть  $u=1$ ;  $v=0.5$ ;  $w=1.5$ . Нужно отметить, что произвольно можно задавать только отношение показателей искажения  $u:v:w$ . Если же заданы сами показатели искажения, значит сам аксонометрический чертеж будет подобно преоб-

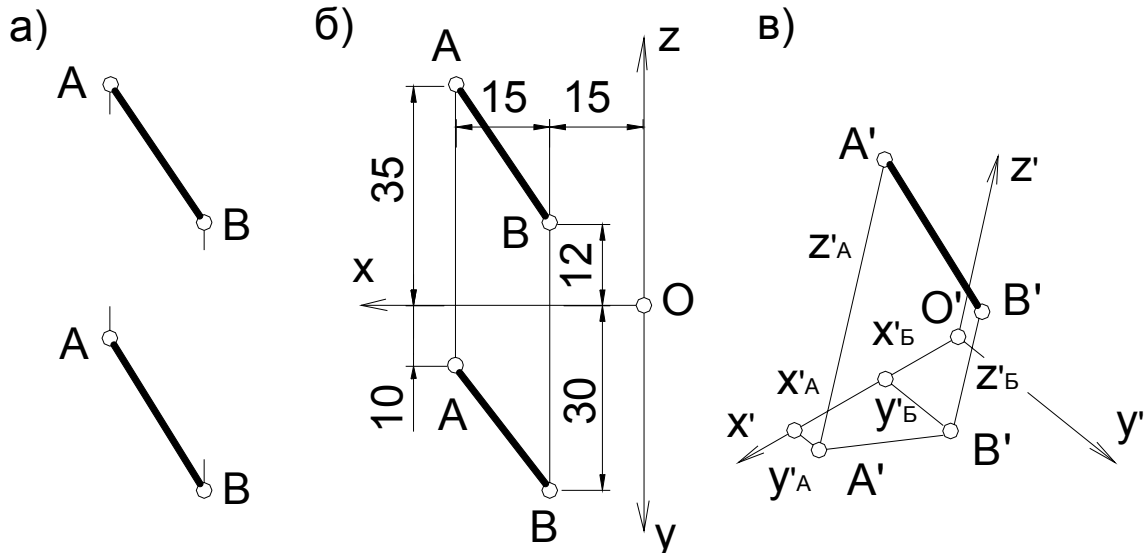


Рисунок 179

разован. При таком преобразовании чертежа его наглядность не страдает, поскольку вид изображения не изменится, изменятся только его размеры.

Теперь при помощи соотношения (1) определяем аксонометрические координаты точек A и B:

$$x'_A = u \cdot x_A = 1 \cdot 30 = 30; y'_A = v \cdot y_A = 0.5 \cdot 10 = 5; z'_A = w \cdot z_A = 1.5 \cdot 35 = 52.5;$$

$$x'_B = u \cdot x_B = 1 \cdot 15 = 10; y'_B = v \cdot y_B = 0.5 \cdot 30 = 15; z'_B = w \cdot z_B = 1.5 \cdot 12 = 18.$$

Откладывая последовательно вдоль аксонометрических осей аксонометрические координаты точки A, построим аксонометрию точки A. Аналогично построим аксонометрию точки B, после чего соединим точки A' и B' (рисунок 179в).

Полученный аксонометрический чертеж выполнен только с точностью до подобия, однако его легко реконструировать, даже не зная коэффициента подобия. Действительно, зная значения показателей искажения по осям, и измерив натуральным масштабом  $e=1\text{мм}$  аксонометрические координатные отрезки точек A и B, можно при помощи соотношений (1) определить натуральные координаты этих точек, и тем самым реконструировать отрезок AB относительно натуральной системы координат.

## 9.2. ОРТОГОНАЛЬНАЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

### 9.2.1. Основные свойства ортогональной аксонометрии

Наибольшее распространение в конструкторской практике получили ортогональные аксонометрические проекции. Этот вид аксонометрии в большей степени удовлетворяет условию наглядности, чем косоугольные проекции, поскольку обычно мы рассматриваем предметы расположенные прямо перед нашими глазами. Кроме того при этом достигается больше упрощений, чем в косоугольных проекциях.

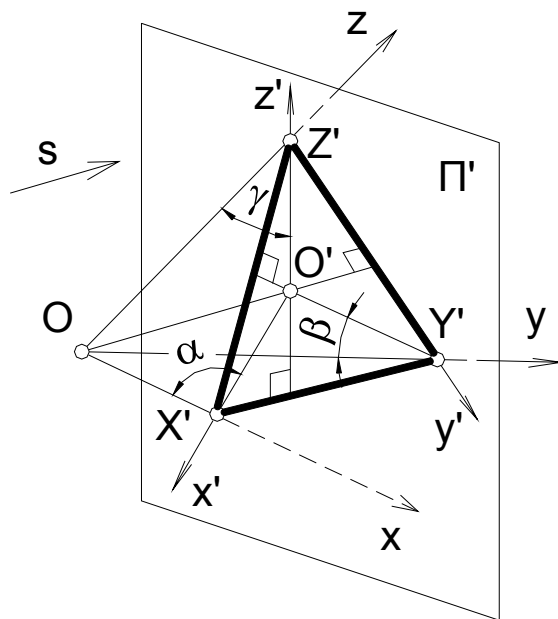


Рисунок 180

В прямоугольной аксонометрии все три координатные оси пересекают картинную плоскость  $\Pi'$  (рисунок 180). Обозначим точки пересечения координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  с картинной плоскостью  $\Pi'$  соответственно  $X'$ ,  $Y'$  и  $Z'$ . Треугольник  $X'Y'Z'$ , по которому плоскость  $\Pi'$  пересекает координатные плоскости натуральной системы координат называют **треугольником следов**, поскольку стороны этого треугольника являются следами координатных плоскостей на плоскости  $\Pi'$

Рассмотрим основные свойства ортогональной аксонометрии.

1. **Треугольник следов  $X'Y'Z'$  всегда остроугольный.**

Это свойство очевидно: декартова система координат пересекается с любой плоскостью (не совпадающей с координатной) по остроугольному треугольнику.

2. **Аксонометрические оси в ортогональной аксонометрии являются высотами треугольника следов.**

Справедливость этого утверждения следует из теоремы о проецировании прямого угла. Например, ось  $Oz$  и отрезок  $X'Y'$ , лежащий в картинной плоскости  $\Pi'$  (и в тоже время в координатной плоскости  $xOy$ ) – перпендикулярны. Поэтому и их проекции  $O'z'$  и  $X'Y'=X'Y'$  также будут перпендикулярны.

3. **Три выходящие из одной точки луча, лежащие в плоскости, только тогда могут являться аксонометрическими осями ортогональной аксонометрии, если они образуют между собой тупые углы.**

Действительно, если лучи  $O'X'$ ,  $O'Y'$  и  $O'Z'$  являются системой аксонометрических осей, то в соответствии со свойством 2 они являются высотами остроугольного треугольника следов  $X'Y'Z'$ . При этом известно, что отрезки высот, соединяющих центр  $O'$  с вершинами  $X'$ ,  $Y'$  и  $Z'$ , образуют попарно тупые углы.

4. ***Показатели искажения в ортогональной аксонометрии равны косинусам углов наклона натуральных осей к картинной плоскости  $\Pi'$ .***

В самом деле, в случае ортогональной аксонометрии  $OO' \perp \Pi'$ , следовательно отрезок  $O'X'$  является ортогональной проекцией отрезка  $OX'$ . Поэтому  $u = O'X' / OX' = \cos \alpha$ . Здесь через  $\alpha$  обозначен угол наклона оси  $x$  к плоскости  $\Pi'$ . Аналогично определяются и показатели искажения  $v$  и  $w$ , поэтому будем иметь :

$$u = \cos \alpha, \quad v = \cos \beta, \quad w = \cos \gamma. \quad (2)$$

Следовательно в ортогональной аксонометрии все три показателя искажения ограничены значениями 0 и 1, что соответствует возможным значениям косинуса.

### 9.2.2. Ортогональная аксонометрия окружности

Довольно часто при выполнении аксонометрических проекций приходится строить эллипсы, в которые проецируются окружности, имеющиеся на комплексном чертеже. Поэтому рассмотрим построение ортогональной проекции окружности, расположенной в какой-либо координатной плоскости (или плоскости параллельной ей).

Для этого вспомним свойства ортогональной проекции окружности, рассмотренные ранее в пункте 27.2. Было выяснено, что ***у эллипса, являющегося ортогональной проекцией окружности, расположенной в какой-либо координатной плоскости, большая ось равна диаметру окружности  $d$  и параллельна прямой уровня этой плоскости, а малая ось равна  $d \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол наклона плоскости окружности к плоскости проекций, и параллельна проекции перпендикуляра к этой плоскости.***

Эти свойства указывают способ построения ортогональной аксонометрии окружностей, расположенных в координатных (или параллельных им) плоскостях.

Действительно, если окружность расположена в одной из координатных плоскостей, то перпендикуляром к ее плоскости будет ***отсутствующая в этой плоскости натуральная координатная ось*** (рисунок 182).

Поэтому *малая ось эллипса, изображающего окружность, лежащую в одной из координатных плоскостей, параллельна аксонометрической проекции натуральной оси, отсутствующей в этой плоскости, а большая ось ей перпендикулярна.*

Поскольку величины осей эллипса определяются соотношениями (см.4.5.2):

$$2a = d; \quad 2b = d \cos \varphi, \quad (3)$$

то показатель искажения по направлению большой оси эллипса равен единице, а по направлению малой оси равен косинусу угла наклона плоскости окружности к плоскости проекций.

Из рисунка 180 видно, что угол  $Z'O'O$  наклона координатной плоскости  $xOy$  к картинной плоскости  $\Pi'$  является дополнительным углом для угла  $\gamma$ , т.к. в треугольнике  $Z'O'O$  угол при вершине  $O$  – прямой. Поэтому, обозначив угол  $Z'O'O$  как  $\varphi_{xy}$ , можно записать:

$$\cos \varphi_{xy} = \sin \gamma \text{ или } \cos \varphi_{xy} = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - w^2}.$$

Аналогично можно определить показатели искажения малых осей для других координатных плоскостей. Таким образом получим, что показатели искажения малых осей эллипсов, изображающих окружности, лежащие в координатных плоскостях  $xOy$ ,  $xOz$  и  $yOz$  соответственно равны:

$$\cos \varphi_{xy} = \sqrt{1 - w^2}; \quad \cos \varphi_{xz} = \sqrt{1 - v^2}; \quad \cos \varphi_{yz} = \sqrt{1 - u^2}. \quad (4)$$

### 9.3. СТАНДАРТНЫЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В соответствии с теоремой Польке можно построить множество аксонометрических изображений предмета, отличающихся направлением осей и показателями искажения по этим осям. Но не все аксонометрические проекции обладают высокой наглядностью и простотой графических построений. Поэтому в инженерной практике для выполнения чертежей наглядных изображений пользуются ограниченным числом аксонометрических проекций.

Для практического построения аксонометрического чертежа углы между осями и показатели искажения по осям зафиксированы в государственных стандартах (ГОСТ 2.317-68). Здесь предусмотрены пять частных видов аксонометрических проекций:

1. прямоугольная изометрия;
2. прямоугольная диметрия;
3. косоугольная фронтальная изометрия;

4. косоугольная горизонтальная изометрия;
5. косоугольная фронтальная диметрия.

Чаще других из этого перечня применяются 1, 2 и 5 проекции, поэтому рассмотрим их более подробно.

### 9.3.1. Ортогональная изометрия

В изометрии показатели искажения по всем трем осям одинаковы  $u = v = w$ . Поэтому на основании соотношений (2) следует, что  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$ , а значит и  $\alpha = \beta = \gamma$ . Следовательно в ортогональной изометрии натуральные координатные оси одинаково наклонены к картинной плоскости  $\Pi'$ . Из равенства углов вытекает и равенство отрезков  $O'X' = O'Y' = O'Z'$  (см. рисунок 180), следовательно треугольник следов  $X'Y'Z'$  будет равносторонним.

Известно, что высоты равностороннего треугольника попарно пересекаются между собой под углом  $120^\circ$ . Поэтому совпадающие с ними аксонометрические оси расположены в ортогональной изометрии под углом  $120^\circ$  друг к другу (рисунок 181).

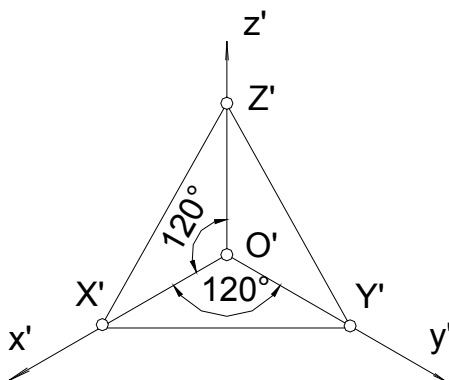


Рисунок 181

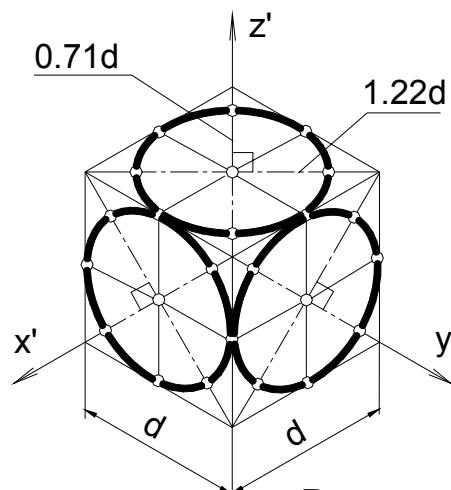


Рисунок 182

Как мы выяснили ранее (см. пункт 45.3) **действительные** показатели искажения для ортогональной изометрии равны  $u=v=w \approx 0.82$ . На практике пользуются **приведенной** ортогональной изометрией, когда показатели искажения «приводятся» к единице, т.е.  $U=V=W=1$ .

Это означает, что «приведенная» ортогональная изометрия дает *подобное* увеличение изображения в  $m=U/u=1 / 0.82 \approx 1.22$  раза. Иными словами масштаб такого изображения будет  $M=1.22:1$ .

Часто при выполнении аксонометрических изображений приходится вычерчивать эллипсы, соответствующие окружностям, лежащим в координатных плоскостях или плоскостях им параллельных. Расположение осей эллипсов, лежащих в координатных или параллельных им плоскостях, рассмотрено выше (см. пункт 46.2). Теперь

определим размеры осей эллипсов. Величины осей эллипсов в приведенной изометрии легко устанавливаются при помощи соотношений (3) и (4) с учетом коэффициента искажения  $m=1,22$ .

На основании первого из соотношений (3) определяем, что большая ось каждого из трех эллипсов, изображающих окружности диаметра  $d$ , лежащих в координатных или параллельных им плоскостях, равна  $1.22d$  (рисунок 182). Малая ось каждого из этих эллипсов на основании второго из соотношений (3) или любого из соотношений (4) будет равна:

$$md = \sqrt{1-u^2} = 1.22d \sqrt{1-2/3} \approx 0.71d.$$

Нужно отметить, что некоторые фигуры при изображении в ортогональной изометрии теряют наглядность. Так квадрат, точнее вертикальное квадратное отверстие (или квадратная призма) в изометрии изображается неудачно: в одну линию сливаются два ребра и одна из граней. Поэтому можно рекомендовать для деталей с квадратным отверстием ортогональную изометрию не применять.

### 9.3.2. Ортогональная диметрия

Тогда как существует *только одна* ортогональная изометрия, ортогональных диметрий можно построить *бесчисленное множество*. Самая простая, распространенная и утвержденная в ГОСТ 2.317-69 диметрия получается, если  $u=w$  и  $v=u/2$ . Отсюда следует, что две натуральные координатные оси ( $x$  и  $z$ ) одинаково наклонены к картинной плоскости  $P'$ , т.е.  $\alpha=\gamma$ .

Из равенства этих углов вытекает равенство отрезков  $O'X'=O'Z'$  (см. рисунок 180). При этом треугольник следов  $X'Y'Z'$  будет равнобедренным (равными сторонами будут стороны  $X'Y'$  и  $Y'Z'$ ).

Ранее (в пункте 45.3) мы выяснили, что **действительные** показатели искажения по осям  $x$  и  $z$  в ортогональной диметрии равны  $u = w = 0.94$ , а по оси  $y$   $v = 0.47$ . В **приведенной** диметрии

$$U = W = 1, \quad V = 0.5$$

Коэффициент приведения при этом равен  $m=U/u=1/0.94 \approx 1.06$ . Это означает, что в «приведенной» ортогональной диметрии изображение получается увеличенным в 1.06 раза. Т.е. масштаб такого аксонометрического изображения  $M=1,06:1$ .

Определим взаимное расположение аксонометрических осей. Поскольку треугольник следов  $X'Y'Z'$  равнобедренный (рисунок 183), то его высота  $AU'$  является также и медианой, т.е.  $X'A=AZ'$ .

Из прямоугольного треугольника  $O'AZ'$  имеем:

$$\sin \delta = AZ' / O'Z' = X'Z' / 2O'Z'.$$

Выразим оба члена этого соотношения через отрезок  $OZ'$  натуральной координатной оси  $z$ . Так как равнобедренный треугольник  $X'O'Z'$  является проекцией прямоугольного равнобедренного треугольника  $X'OZ'$  (см. рисунок 180), то  $X'Z' = OZ' \sqrt{2}$ . Тогда:

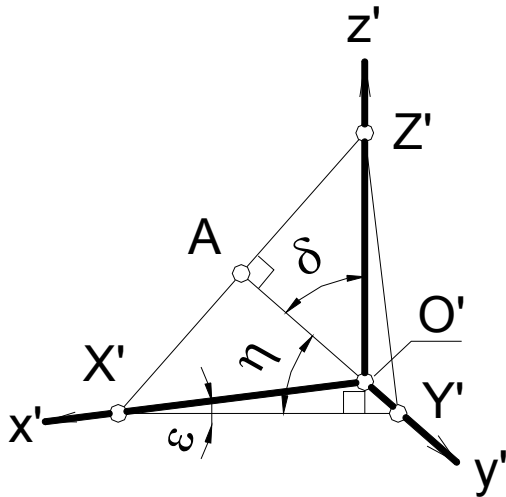


Рисунок 183

$$O'Z = w OZ', \text{ но } w = (2\sqrt{2}) / 3 \\ \text{поэтому } O'Z' = (2\sqrt{2}) / 3 OZ'.$$

$$\text{Отсюда } 2O'Z' = (4\sqrt{2}) / 3 OZ', \text{ значит} \\ \sin \delta = (OZ' \sqrt{2}) / [(4\sqrt{2}) / 3 OZ'] = 3/4.$$

По найденному значению  $\sin \delta$  определим уклоны диметрических осей  $x'$  и  $y'$  относительно стороны  $X'Y'$  треугольника следов (рисунок 183), другими словами – определим  $\operatorname{tg} \varepsilon$  и  $\operatorname{tg} \eta$ .

$$\text{Видно, что } \operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} (2\delta - 90^\circ) = \operatorname{ctg} 2\delta = [(\operatorname{tg}^2 \delta)^2 - 1] / 2 \operatorname{tg} \delta$$

$$\text{Но так как } \operatorname{tg} \delta = \sin \delta / \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = (3/4) / \sqrt{1 - 9/16} = 3/\sqrt{7},$$

$$\text{то } \operatorname{tg} \varepsilon = (9/7 - 1) / (6/\sqrt{7}) = 1 / (3\sqrt{7}) \approx 7/8.$$

Исходя из этого, получаем следующий способ построения аксонометрических осей в ортогональной диметрии. Через некоторую точку  $O'$  проводим вспомогательную прямую, перпендикулярную к выбранной вертикальной (всегда) оси  $z'$  (рисунок 184). По обе стороны от точки  $O'$  на этой прямой откладываем по восемь произвольной длины, но равных между собой отрезков. От левой конечной точки откладываем вертикально вниз один такой же отрезок, а от правой конечной точки откладываем вниз семь таких же отрезков. Соединив вновь полученные точки с точкой  $O'$ , получим направление аксонометрических осей  $x'$  и  $y'$ .

Построение эллипсов, изображающих окружности, лежащие в координатных и параллельных им плоскостях, выполняется следующим образом.



Как и в изометрии, малые оси эллипсов параллельны аксонометрическим проекциям осей, отсутствующим в их (эллипсов) плоскости, а большие оси эллипсов перпендикулярны малым осям (рисунок 185).

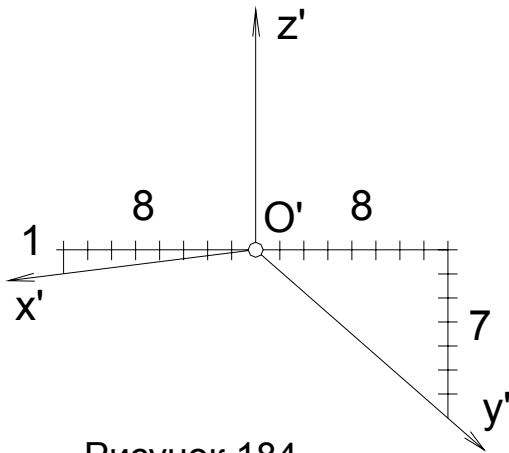


Рисунок 184

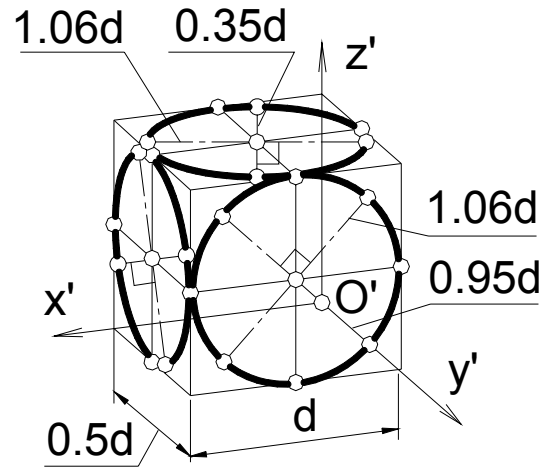


Рисунок 185

Большая ось каждого эллипса в «приведенной» диметрии равна  $1.06d$ . Для определения малых осей эллипсов необходимо вычислить показатели их искажения. На основании второго из соотношений (3) и соотношений (4) и с учетом коэффициента приведения  $m=1.06$  получим для двух координатных плоскостей ( $xOy$  и  $xOz$ ) следующие величины малых осей:

$$md\sqrt{(1-w^2)} \text{ или } md\sqrt{(1-u^2)}=1.06d \sqrt{(1-8/9)} \approx 0.35d.$$

Для координатной плоскости  $xOz$  величина малой оси будет:

$$md\sqrt{(1-v^2)}=1.06d \sqrt{(1-2/9)} \approx 0.95d.$$

### 9.3.3. Косоугольная фронтальная диметрия

В конструкторской практике достаточно часто приходится строить аксонометрию детали, у которой имеется много окружностей, лежащих в параллельных плоскостях. В этом случае бывает полезным применение такой аксонометрии, в которой изображение хотя бы в одной из координатных плоскостей не искажалось.

Понятно, что для выполнения этого условия одна из координатных плоскостей должна быть параллельна картинной плоскости проекций. Если при этом воспользоваться ортогональным проецированием, то координатная ось, перпендикулярная указанной координатной плоскости, изобразится точкой и изображение будет лишено на-

глядности. По этой причине приходится пользоваться косоугольным проецированием.

Например, если расположить картинную плоскость  $\Pi'$  параллельно координатной плоскости  $xOz$ , то аксонометрические оси  $x'$  и  $z'$  будут перпендикулярны и показатели искажения по этим осям будут равны единице:  $u = w = 1$  (рисунок 186а).

Фигуры, лежащие в плоскости  $xOz$  и параллельной ей плоскостях, не будут искажаться на аксонометрическом изображении, что значительно упрощает построение аксонометрии.

Величина показателя искажения по оси  $y'$  и направление этой аксонометрической оси зависят от направления проецирования  $OO'$  (рисунок 186а).

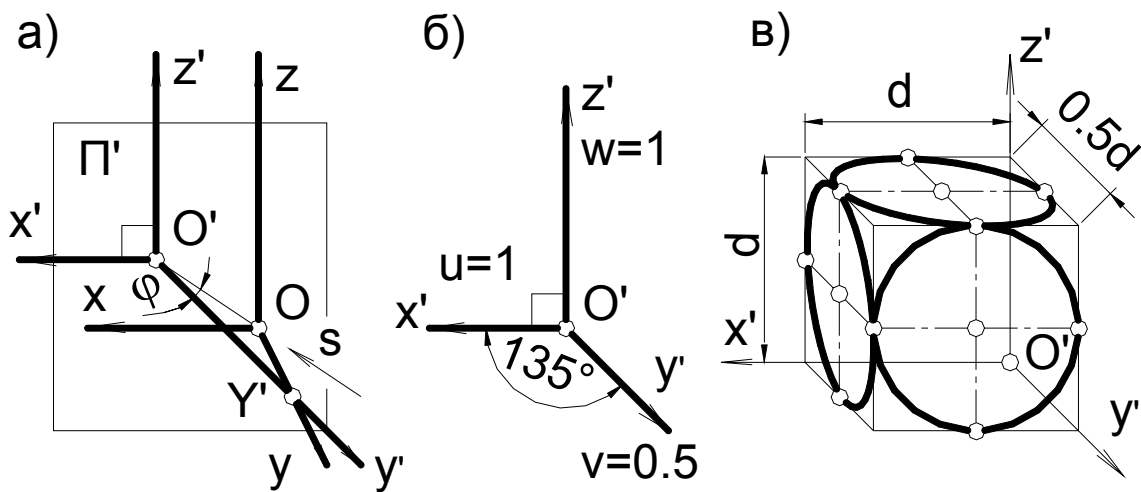


Рисунок 186

Так как для косоугольной диметрии имеет место соотношение

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg} \varphi,$$

то, учитывая, что  $u=w$ , получаем  $v = \operatorname{ctg} \varphi$ .

Известно, что котангенс угла может иметь любое числовое значение. На практике направление оси  $y'$  выбирают таким, чтобы углы, образованные осью  $y'$  с осями  $x'$  и  $z'$  равнялись бы  $135^\circ$ , а показатель искажения по оси  $y'$   $v=0.5$  (рисунок 186б). Такую косоугольную диметрию называют *фронтальной диметрией*.

Выясним величину угла  $\varphi$  – угла наклона проецирующих лучей к картинной плоскости  $\Pi'$ . Так как  $\operatorname{ctg} \varphi = v = 0.5$ , то

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 0.5 \approx 63^\circ.$$

На рисунке 186в показаны проекции трех окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных координатным. Окружность, располо-

женная в плоскости параллельной координатной плоскости  $xOz$ , проецируется на картинную плоскость  $\Pi'$  без искажения, а окружности, лежащие в плоскостях параллельных координатным плоскостям  $xOy$  и  $yOz$ , проецируются в виде эллипсов. При необходимости эти эллипсы строят по сопряженным диаметрам.

#### 9.4. ПОСТРОЕНИЕ СТАНДАРТНЫХ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Обычно аксонометрические проекции оригиналов строятся по их комплексным чертежам. Рассмотрим несколько примеров построения стандартных аксонометрических проекций оригиналов, заданных своими комплексными чертежами.

**Пример 1.** Построить ортогональную изометрию шестигранной пирамиды (рисунок 187).

Построение выполняем в следующей последовательности. Свяжем с пирамидой натуральную систему координат  $Oxyz$ . За начало координат выбираем точку  $O$  – центр основания пирамиды. Ось  $x$  направим влево (параллельно фронтальной плоскости), ось  $y$  – в сторону наблюдателя, ось  $z$  – вертикально вверх.

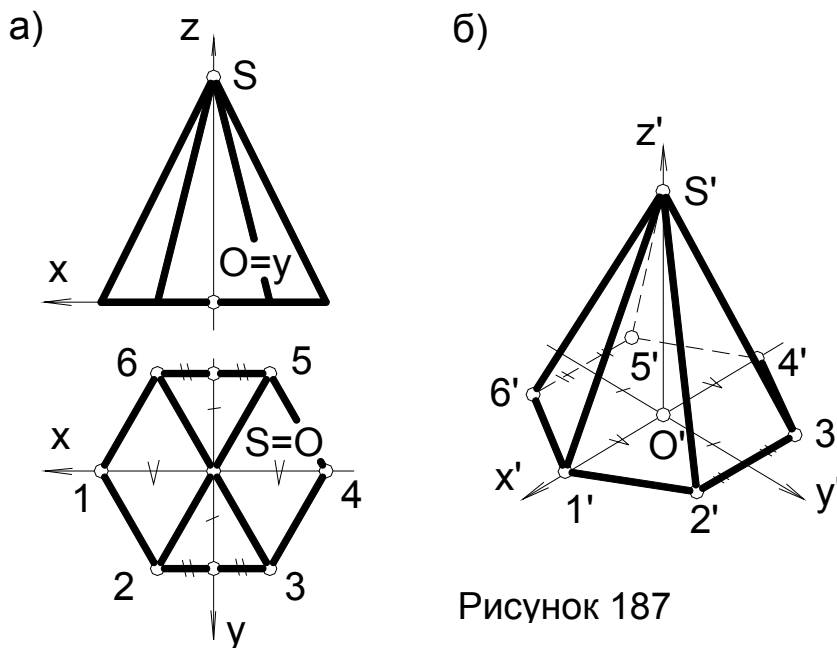


Рисунок 187

На свободном месте чертежа вычерчиваем аксонометрическую систему координат  $O'x'y'z'$ , продлевая оси  $x$  и  $y$  в отрицательную сторону от точки  $O$ .

Для построения аксонометрии точек 1 и 4, лежащих на оси  $x$ , измеряем их абсциссы (координату  $x$ ) и откладываем

*эти величины* вдоль оси  $x'$  (с учетом отклонения относительно точки  $O$ ). Напомним, что в приведенной изометрии показатели искажения по всем осям равны единице (т.е. размеры, измеренные на комплексном чертеже, непосредственно откладываются вдоль аксонометрических осей).

Точки 2,3,5 и 6 лежат на прямых, параллельных оси  $x$ . Поэтому удобно сначала построить эти вспомогательные прямые, располо-

женные на равных расстояниях от оси  $x$  (отмечены одним штрихом). Измерив на комплексном чертеже абсциссы указанных точек, откладываем полученную величину (отмечена двумя штрихами) на вспомогательных прямых от пересечения последних с осью  $y$ . Таким образом построены все шесть точек основания пирамиды. Соединив точки основания, получаем изометрию шестиугольника.

Отложив на оси  $z$  от точки  $O$  высоту пирамиды, получим изометрию вершины  $S$ . Соединяя вершину пирамиды с шестью точками основания, получаем изометрию пирамиды. В заключении определяем видимость ребер пирамиды.

**Пример 2.** Построить стандартную ортогональную диметрию шестиугольной призмы с цилиндрическим отверстием (рисунок 188).

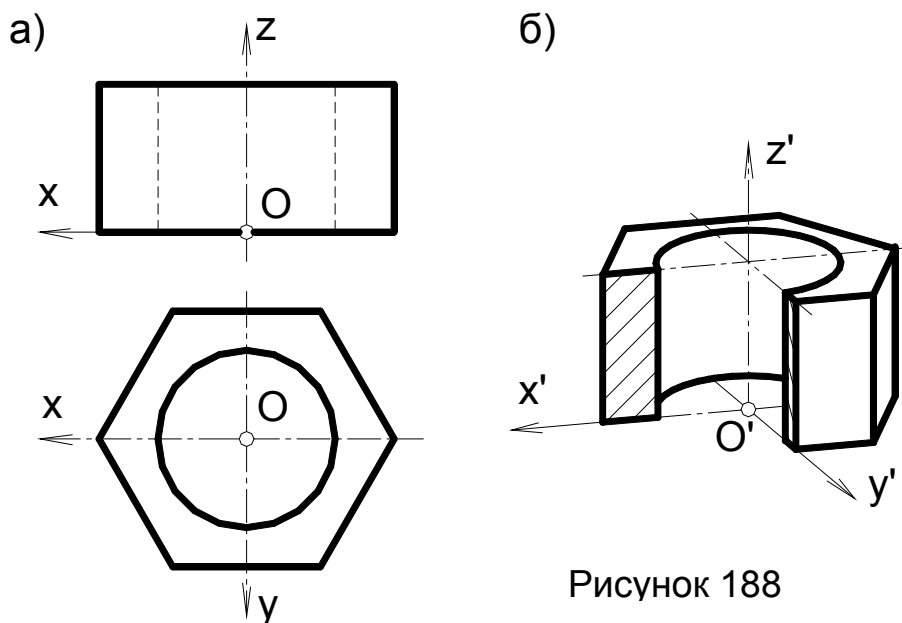


Рисунок 188

«Свяжем» с призмой натуральную систему координат  $Oxyz$ , расположив оси, как показано на рисунке 188а. Построим диметрические оси координат (см. 9.2.2, рисунок 184).

Построение аксонометрических проекций деталей, у которых имеется несколько параллельных плоскостей, удобно проводить по слоям. В нашем примере деталь имеет две параллельные горизонтально расположенные плоскости. Сначала построим диметрические изображения окружности и шестиугольника, лежащих в нижней плоскости ( $xOy$ ). Затем, отмерив высоту призмы вдоль оси  $z$ , вновь проведем диметрические оси и на этом уровне. Построим снова диметрические изображения окружности и шестиугольника, теперь уже лежащих в верхней плоскости детали. Соединим вертикальными отрезками полученные изображения – это и будет диметрия данной детали.

Часто для увеличения наглядности выполняют вырез части детали как это показано на рисунке 188б. Вырез обычно осуществляют

плоскостями, совпадающими с аксонометрическими координатными плоскостями. В нашем примере секущие плоскости совпадают с координатными аксонометрическими плоскостями  $x'O'z'$  и  $y'O'z'$ .

**Пример 3.** Построить аксонометрию технической детали; вырезать на аксонометрии  $\frac{1}{4}$  часть детали (рисунок 189, стр.175).

В этом примере не определено, какую аксонометрию необходимо построить. Но учитывая приведенную ранее рекомендацию (см. 9.2.1), выбираем фронтальную диметрию.

Не будем подробно пояснять все построения. Отметим лишь, что выполнение построений удобно проводить по слоям, как в предыдущем примере. Укажем основные этапы работы.

1. Привязка к данной детали натуральной системы координат.
2. Построение диметрических осей.
3. Послойное построение аксонометрических изображений всех фигур, лежащих в каждом из слоев (рисунок 189б).
4. Соединение фигур разных слоев с учетом их принадлежности внутренней или внешней поверхности детали. При этом получается каркасное изображение (рисунок 189в).
5. Вырез  $\frac{1}{4}$  части детали производится по аксонометрическим осевым линиям.
6. Удаление вспомогательных линий построения.
7. Штриховка полученных сечений и обводка линий видимого контура.

Окончательный результат показан на рисунке 189г.

**Пример 4.** Построить аксонометрию многоступенчатой поверхности вращения (рисунок 190).

Принимая во внимание, что у данной детали имеется несколько окружностей, расположенных в параллельных плоскостях, выбираем косоугольную фронтальную диметрию.

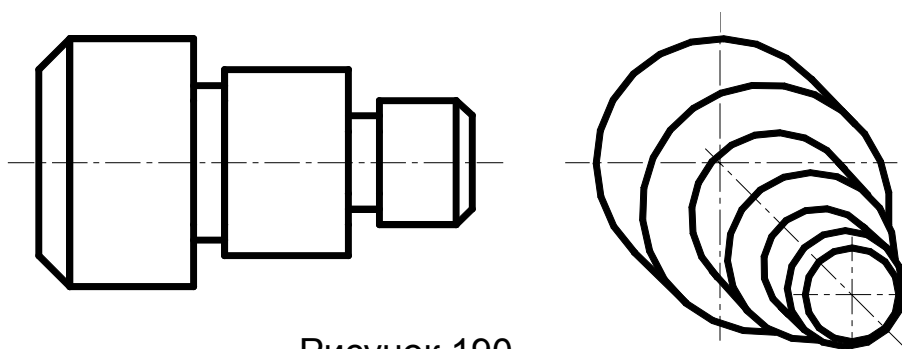


Рисунок 190

Построение этой аксонометрии достаточно несложное. Напомним лишь, что вдоль оси  $y'$  размеры, измеренные на чертеже, откладываются с учетом показателя искажения равного 0.5.

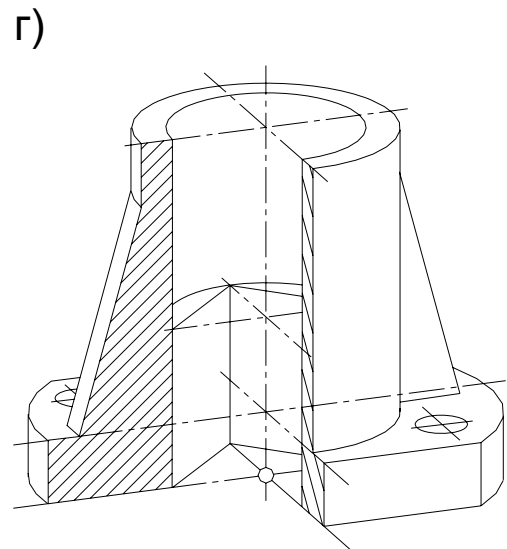
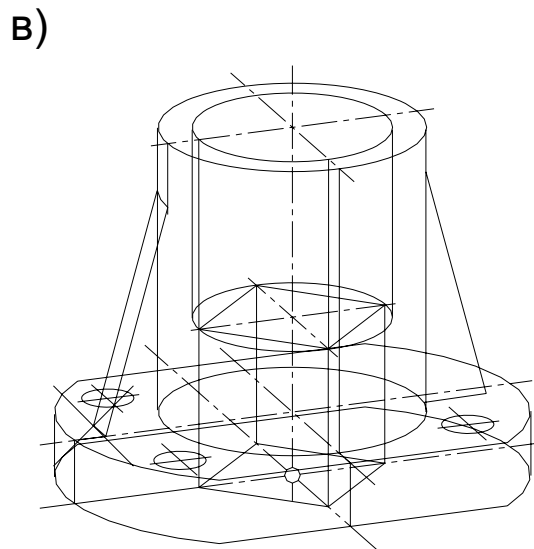
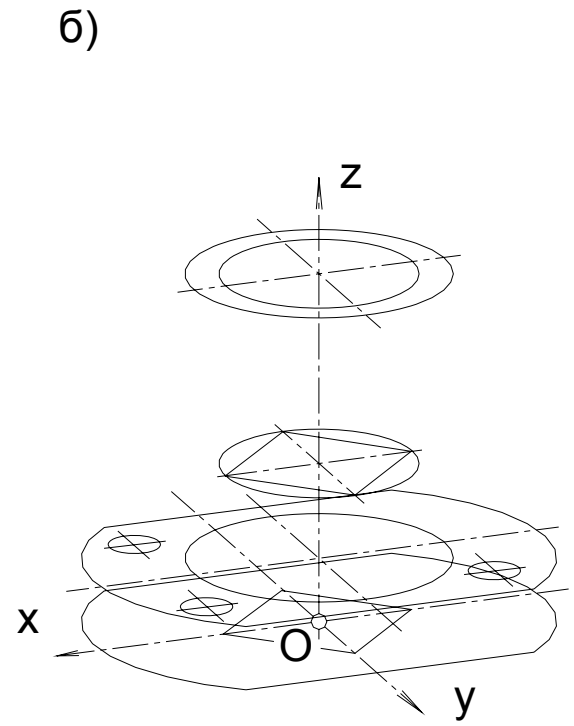
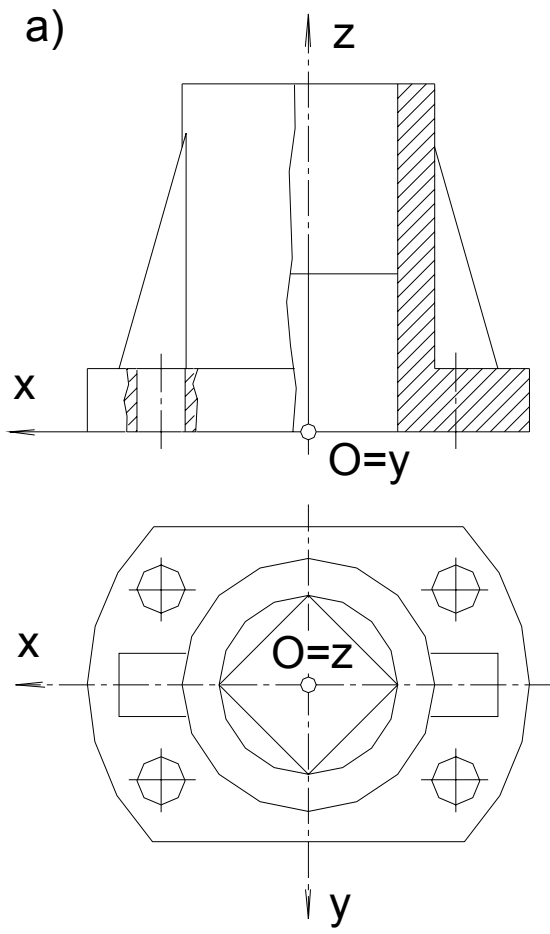


Рисунок 189

## ГЛАВА 10

### СВЕДЕНИЯ О КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

---

#### 10.1.. СВЕДЕНИЯ О КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

##### 10.1.1. Преимущества компьютерной графики перед традиционным способом выполнения чертежей

С самых первых дней создания ЭВМ возникла идея использовать компьютер для выполнения графиков, чертежей, схем и рисунков. При этом появилась возможность хотя бы частично автоматизировать трудоемкий процесс выполнения чертежных работ, предоставив человеку больше времени для решения творческих задач.

Однако до практического применения компьютерной графики, пригодной в какой-то степени для промышленного использования, дело дошло лишь во второй половине 60-х годов XX столетия. Основными причинами этого были недостаточное развитие технических и программных средств, высокая стоимость самих ЭВМ, а также специального графического оборудования.

Сегодня, когда в нашу жизнь прочно вошли персональные компьютеры с высоким быстродействием, большим объемом памяти, когда появились достаточно совершенные диалоговые программы обработки изображений, компьютерная графика стала доступной не только узкому кругу специалистов.

Каких-то специальных программ для решения задач только начертательной геометрии нет, поскольку такие программные продукты как AutoCAD (фирмы «AutoDesk») или КОМПАС (российской фирмы «АСКОН») позволяют выполнять геометрическое трехмерное моделирование создаваемого объекта, при котором попутно решаются многие задачи начертательной геометрии. Так, например, при создании трехмерного твердотельного объекта из нескольких более простых трехмерных объектов при помощи булевых операций (сложение, вычитание, пересечение) линии пересечения их поверхностей строятся автоматически. При этом пользователь может не знать языков программирования, выполнение чертежа производится при диалоге его с компьютером.

В чем же преимущества компьютерной графики перед традиционным (ручным) способом выполнения чертежной документации?

1. Использование компьютера сокращает время выполнения чертежа в несколько раз (при достаточном освоении программ – до 10 раз). Не имеет большого смысла простое ис-

- пользование компьютера как «электронного карандаша», т.е. выполнение с его помощью плоских, двухмерных изображений, хотя и в этом случае чертеж строится довольно быстро.
2. Наличие библиотек изображений стандартных элементов (имеются библиотеки стандартных крепежных, электрических, гидравлических, пневматических, архитектурных, строительных элементов), которые можно самостоятельно дополнять, и геометрических форм, так же способствуют сокращению времени выполнения чертежа. Имеется возможность простого «перетаскивания» мышью готовых стандартных изображений в свой чертеж.
  3. Точность выполнения «компьютерного» чертежа значительно выше, нежели выполненного вручную, поскольку положение любой точки чертежа определяется точно (либо заданием ее координат, либо использованием так называемой «объектной привязки» – привязки к определенным точкам чертежа).
  4. Качество оформления чертежа (линии, шрифты) не зависит от конструкторского опыта его создателя и всегда стабильно, так как устройство вывода графической информации (принтер, плоттер, графопостроитель) имеет постоянные, настраиваемые по желанию пользователя, технические характеристики. При этом следов многократных исправлений на чертеже не будет видно, так как чертеж выводится на печать только после того, как на экране монитора выполнены все необходимые исправления и доработки.
  5. Сохранив файл чертежа, можно многократно использовать его при проектировании изделий, аналогичных ранее выполненному. При этом можно сохранить множество вариантов решения одной задачи. Часто бывает более простым решением отредактировать (изменить) ранее созданный чертеж, чем создавать новый.
  6. Требования к компьютеру при этом по нынешним меркам невысоки:
    - Pentium 133 и выше;
    - оперативная память 32 Мбайт;
    - 150 Мбайт памяти на жестком диске;
    - 64 Мбайт памяти (минимум) на жестком диске для временных файлов.
    - 800x600 VGA монитор;
    - операционная система Windows NT 4.0 / 95 / 98 / 2000.

Есть еще много специальных средств, позволяющих автоматически получать необходимые изображения оригинала и выполнять оформление чертежа. Об этом коротко расскажем ниже.



### **10.1.2. Техническое обеспечение компьютерной графики**

Не будем углубляться в классификацию существовавших ранее и существующих сегодня технических средств ввода-вывода графической информации, методы и принципы их работы. Коротко рассмотрим только современные и наиболее часто применяемые из них.

В состав комплекса технических средств компьютерной графики входят, как правило, ПЭВМ (системный блок, монитор), устройства ввода (сканер, клавиатура, мышь) и устройства вывода графического изображения (принтер, плоттер или графопостроитель).

Монитор, представляющий собой устройство отображения информации, предназначен для организации зрительной связи пользователя с ЭВМ. С помощью алфавитно-цифровой клавиатуры и мыши пользователь формирует на экране монитора (дисплея) команды для ЭВМ, после чего, как правило, появляются запросы на ввод дополнительной уточняющей информации. Таким образом осуществляется диалог пользователя с ЭВМ.

При помощи сканера можно ввести в компьютер любую графическую (в том числе фотографию или картину) и текстовую информацию. После этого при помощи соответствующих программных средств эту информацию можно редактировать (изменять, править, дополнять) и сохранять как самостоятельный файл.

Клавиатура удобна для ввода текста, знаков и чисел (координат точек). Кроме того, можно с ее помощью перемещать курсор монитора.

Устройство ввода «мышь» удобно при работе с графическими программами. Мышь позволяет не только указывать положение точек, но и помогает при выборе объектов, их трансформации и переносе. В современных программах чаще всего приходится работать параллельно с клавиатурой и мышью.

Устройством вывода графической информации для форматов бумаги А4 или А3 вполне могут служить струйный или лазерный принтеры, дающие достаточно четкое, точное и качественное изображение. Применение матричных принтеров дает худшие результаты. При необходимости вывода на печать чертежей большего формата желательно использовать плоттер или графопостроитель.

### **10.1.3. Программное обеспечение компьютерной графики**

Программное обеспечение компьютерной (машинной) графики разрабатывалось параллельно развитию техники. Начальные графические пакеты программ были ориентированы на двухмерную

графику и не были интерактивными. Например, для выполнения чертежа в ранее широко известном графическом пакете ГРАФОР, необходимо было вначале написать программу для ЭВМ, ввести программу в машину, и только после этого можно было увидеть результат работы программы на экране монитора. Если при написании программы была допущена ошибка, то необходимо было после просмотра результата на мониторе внести исправления в программу.

Современные программные средства (например упоминавшиеся выше AutoCAD и КОМПАС) выгодно отличаются от прежних графических пакетов, таких как ГРАФОР, ГРАФ-СМ, ФАП-КФ и других. Они предназначены не просто для вычерчивания изображений и нанесения элементов оформления чертежа (размеров, надписей). Последние версии современных программных продуктов позволяют конструктору выполнять геометрическое трехмерное моделирование создаваемого объекта.

Изменилась сама «технология» создания чертежа. Вычерчивать плоские (двухмерные) изображения имеет смысл только для простых деталей, для изображения которых достаточно одного вида. Для более сложных объектов, требующих нескольких изображений, вначале создается твердотельная модель детали (или сборочной единицы), на основе которой, пользуясь специальными средствами выполнения чертежей, можно получить любые необходимые изображения – виды, разрезы, сечения и аксонометрические проекции.

Создание твердотельной модели при некотором навыке не вызывает особых затруднений. Для удобства их создания имеется набор основных геометрических форм: параллелепипед, сфера, цилиндр, конус, усеченный конус, пирамида. Если требуется создать тело более сложной формы, то возможно получить его «выдавливанием» или «вращением» замкнутой линии любой конфигурации. При этом направление выдавливания (путь) или ось вращения задаются конструктором по своему усмотрению. После создания всех основных элементарных твердотельных объектов, этаких «кирпичиков» будущей модели, при помощи операций сложения, вычитания или пересечения получаем единую твердотельную модель оригинала.

Чем она удобна? Дело в том, что в указанных программах имеется возможность визуализировать эту модель, т.е. раскрасить ее в любой цвет, удалить невидимые линии. С учетом выбранного освещения и падающих при этом теней получается очень наглядное изображение объекта. Его можно вращать в любых направлениях, как бы рассматривая с разных сторон, оценивая удачность конструкторского решения. При необходимости можно внести нужные изменения в геометрические формы объекта.

Полученную твердотельную модель можно экспортировать в другие программы (например, для прочностных расчетов), после чего вернуть модель в графическую программу и вновь внести изменения в геометрию детали, если в этом есть необходимость.

Получив таким образом удовлетворяющую конструктора модель объекта, можно заняться оформлением ее чертежа. Для этого в AutoCAD-2000, например, есть несколько приемлемых способов.

Комплексный чертеж детали или сборочной единицы, как правило, предусматривает использование нескольких проекций, т.е. нам придется создать несколько так называемых «видовых экранов». Иными словами - в AutoCAD-2000 имеется возможность создавать макет чертежа.

При этом, во-первых, можно просто ограничиться самостоятельно расположенными видовыми экранами с различными проекциями твердотельной модели, удалить невидимые линии, построить необходимые сечения. При этом имеется возможность согласовать изображения в разных видовых экранах (проекциях).

Во-вторых, и это более важно, специально для твердотельных объектов имеется ряд возможностей, облегчающих создание чертежа. В этом случае конструктор сам создает и располагает в нужном месте чертежа несколько видовых экранов (проекций) с изображением в них *плоскостных проекций* видов, разрезов, аксонометрических проекций, дополнительных видов.

Достаточно просто производится простановка на чертеже размеров различных типов (линейных, угловых, радиусов, диаметров, цепочкой и т.д.). Так же просто наносятся предельные отклонения (допуски) формы, расположения и размеров деталей. В готовый чертеж можно добавить любую текстовую информацию, например технические требования.

Имеются готовые шаблоны оформления всех форматов (рамки чертежа с основной и дополнительными надписями), которые можно наложить на имеющийся чертеж.

Таким образом, мы видим, что современное программное обеспечение позволяет как бы создать макет объекта и легко оформить его чертеж.

#### **10.1.4. Компьютерная графика в ТГТУ**

В Тверском государственном техническом университете внедрение компьютерной графики в учебный процесс началось более двух десятков лет назад, в те времена, когда еще не существовало персональных компьютеров. Это было время вычислительных машин серий СМ и ЕС.

И сегодня ряд кафедр университета, среди которых кафедры «Электронные вычислительные машины» и «Инженерная графика», активно работают в этой области.

Регулярно рассматривались и анализировались все появляющиеся новые программные продукты с целью применения их для обучения студентов основам компьютерной графики. По нашему мнению в большей степени этому соответствуют уже упоминавшиеся AutoCAD и КОМПАС, причем AutoCAD-2000 на сегодняшний день имеет преимущество как более глубоко проработанный и сбалансированный графический пакет.

Студенты ряда специальностей разных факультетов в отведенное рабочими программами время (предмет «по выбору»), изучают наравне с основами начертательной геометрии и инженерной графикой так же и компьютерную графику.

На кафедре «Инженерная графика» подготовлена методическая литература для лабораторных занятий со студентами 1-го и 2-го курсов различных специальностей, которая позволяет усвоить государственные стандарты по оформлению чертежей. Также разработаны упражнения и простейшие задания при помощи которых студенты осваивают как традиционный (вручную) способ выполнения чертежей, так и компьютерную графику.

Так, например, студенты специальности «Электронные вычислительные машины» в первом семестре выполняют два графических задания. При этом графические работы вначале выполняются параллельно «вручную» и в компьютерном варианте, а по мере приобретения навыков работы в среде AutoCAD, приоритет отдается последнему.

Первое задание «Геометрическое черчение» представляет собой плоский чертеж. Здесь изучаются основные стандарты – «Форматы», «Масштабы», «Линии чертежа», «Шрифты», а так же правила выполнения сопряжений. При этом в AutoCAD-2000 отрабатывается:

- построение основных примитивов – точки, отрезка, дуги, окружности, эллипса;
- создание слоев с разными свойствами для размещения на них линий разного назначения – оси, вспомогательные построения, линии обводки, а так же слой для размещения размеров.
- нанесение размеров – линейных, угловых, диаметров и радиусов.
- переход в пространство листа при наложении чертежа на шаблон формата А4 (макет чертежа).

Второе задание «Проекционное черчение» более сложное. Здесь изучаются стандарты – «Изображения: виды, разрезы, сечения», «Графическое изображение материалов на чертежах» и правила нанесения размеров. В AutoCAD-2000 отрабатывается:

- создание пространственной твердотельной модели;
- создание комплексного чертежа из четырех не перекрывающихся видовых экранов (три вида и аксонометрическая проекция);
- нанесение размеров.

Изучение компьютерной графики дает хороший толчок для самостоятельного углубленного изучения множества возможностей указанного графического пакета в формировании чертежа и оформлении конструкторской документации.

В дальнейшем эти знания применяются при выполнении курсовых и дипломного проектов.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Принятые обозначения.....</b>	<b>3</b>
<b>Введение</b>	
Предмет начертательной геометрии.....	5
Хронология развития начертательной геометрии.....	6
<b>ГЛАВА 1</b>	
<b>КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ И</b>	
<b>ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ</b>	
<b>1.1. Способы проецирования.....</b>	<b>9</b>
1.1.1. Центральное проецирование.....	9
1.1.2. Параллельное проецирование.....	10
1.1.3. Основные свойства параллельного проецирования.....	10
1.1.4. Прямоугольное проецирование.....	12
<b>1.2. Комплексный чертеж точки.....</b>	<b>13</b>
1.2.1. Пространственная модель.....	13
1.2.2. Комплексный чертеж.....	14
1.2.3. Отказ от фиксированных плоскостей проекций.....	14
<b>1.3. Комплексный чертеж прямой.....</b>	<b>16</b>
1.3.1. Задание прямой.....	16
1.3.2. Профильная прямая.....	17
<b>1.4. Комплексный чертеж плоскости.....</b>	<b>18</b>
<b>1.5. Комплексный чертеж из трех проекций.....</b>	<b>19</b>
1.5.1. Третья (профильная) плоскость проекций.....	19
1.5.2. Трех видовой комплексный чертеж.....	19
<b>1.6. Прямые и плоскости частного положения.....</b>	<b>21</b>
1.6.1. Термины и определения.....	21
1.6.2. Проецирующие прямые.....	21
1.6.3. Проецирующие плоскости.....	23
1.6.4. Плоскости уровня.....	25
1.6.5. Прямые уровня.....	27
1.6.6. Прямые частного положения в плоскости.....	28
<b>1.7. Условия видимости на комплексном чертеже.....</b>	<b>29</b>
<b>1.8. Основные позиционные задачи.....</b>	<b>31</b>
1.8.1. Термины и определения.....	31
1.8.2. Взаимное расположение двух точек.....	31
1.8.3. Взаимное расположение точек и прямой.....	32
1.8.4. Взаимопринадлежность точки и прямой.	
Деление отрезка в заданном отношении.....	33
1.8.5. Взаимное расположение двух прямых.....	34

1.8.6. Взаимное расположение точки и плоскости. Взаимопринадлежность точки и плоскости.....	35
<b>1.9. Взаимное расположение прямой и плоскости.....</b>	<b>37</b>
<b>1.10. Взаимное расположение двух плоскостей.....</b>	<b>41</b>

## **ГЛАВА 2**

### **ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ И ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА МНОГОГРАННИКИ**

<b>2.1. Изображение многогранников.....</b>	<b>45</b>
<b>2.2. Пересечение многогранника с плоскостью.....</b>	<b>46</b>
<b>2.3. Пересечение многогранника с прямой.....</b>	<b>49</b>
<b>2.4. Взаимное пересечение многогранников.....</b>	<b>51</b>

## **ГЛАВА 3**

### **МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ**

<b>3.1. Определение натуральной величины отрезка и углов его наклона к плоскостям проекций.....</b>	<b>55</b>
<b>3.2. Ортогональная проекция прямого угла.....</b>	<b>56</b>
<b>3.3. Прямые наибольшего уклона плоскости.....</b>	<b>59</b>
<b>3.4. Перпендикулярность прямой и плоскости.....</b>	<b>61</b>
<b>3.5. Взаимная перпендикулярность плоскостей.....</b>	<b>63</b>
<b>3.6. Взаимная перпендикулярность прямых общего положения.....</b>	<b>64</b>

## **ГЛАВА 4**

### **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧЕРТЕЖА**

<b>4.1. О преобразовании комплексного чертежа.....</b>	<b>66</b>
<b>4.2. Основы способа дополнительных видов.....</b>	<b>67</b>
<b>4.3. Основные задачи, решаемые с помощью способа дополнительных видов.....</b>	<b>69</b>
<b>4.4. Способ вращения вокруг проецирующей прямой.....</b>	<b>76</b>
4.4.1. Вращение точки вокруг проецирующей прямой.....	77
4.4.2. Вращение прямой линии вокруг проецирующей прямой.....	78
4.4.3. Вращение плоскости вокруг проецирующей прямой.....	79
4.4.4. О возможностях способов вращения и дополнительного проецирования.....	80
<b>4.5. Способ вращения вокруг прямой уровня.....</b>	<b>82</b>
4.5.1. Вращение точки.....	82

4.5.2. Вращение плоскости вокруг прямой уровня.....	83
4.5.3. Измерение углов.....	84
4.5.4. Построение в плоскости общего положения фигуры заданной формы и размеров.....	86

## **ГЛАВА 5**

### **КРИВЫЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ**

<b>5.1. Кривые линии и их проекции.....</b>	<b>88</b>
5.1.1. Плоские кривые.....	88
5.1.2. Ортогональная проекция окружности.....	89
5.1.3. Пространственные кривые.....	91
<b>5.2. Образование, задание и изображение поверхностей...93</b>	<b>93</b>
5.2.1. Образование поверхностей.....	93
5.2.2. Задание поверхности на комплексном чертеже.....	94
5.2.3. Классификация поверхностей.....	94
<b>5.3. Поверхности вращения.....95</b>	<b>95</b>
5.3.1. Поверхности, образуемые вращением прямой линии.....	96
5.3.2. Поверхности, образуемые вращением окружности...97	97
5.3.3. Поверхности, образуемые вращением кривых второго порядка.....	97
<b>5.4. Линейчатые поверхности.....99</b>	<b>99</b>
5.4.1. Линейчатые поверхности с одной направляющей..100	100
5.4.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими101	101
5.4.3. Линейчатые поверхности с тремя прямолинейными направляющим.....	103
<b>5.5. Поверхности второго порядка.....103</b>	<b>103</b>
<b>5.6. Винтовые поверхности.....104</b>	<b>104</b>
<b>5.7. Циклические и топографические поверхности.....106</b>	<b>106</b>
5.7.1. Циклические поверхности.....	106
5.7.2. Топографические поверхности.....	107

## **ГЛАВА 6**

### **ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЛОСКОСТЬЮ И ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ.**

#### **ПЛОСКОСТИ КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТИ**

<b>6.1. Пересечение поверхностей с плоскостью.....</b>	<b>108</b>
<b>6.2. Примеры построения линии пересечения поверхности с плоскостью.....</b>	<b>109</b>
6.2.1. Особые случаи пересечения поверхности с плоскостью.....	112



<b>6.3. Пересечение поверхности с прямой линией.....</b>	<b>117</b>
6.3.1. Основной способ определения точек пересечения.....	117
6.3.2. Частные случаи построения точек пересечения.....	119
6.3.3. Косоугольное проецирование при построении точек пересечения.....	119
<b>6.4. Плоскости, касательные к поверхностям.....</b>	<b>121</b>

## **ГЛАВА 7**

### **ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

<b>7.1. Способы построения линии пересечения двух поверхностей.....</b>	<b>124</b>
<b>7.2. Способ вспомогательных проецирующих плоскостей.....</b>	<b>126</b>
7.2.1. Общий случай применения способа .....	126
7.2.2. Частные случаи пересечения.....	127
<b>7.3. Способ вспомогательных плоскостей общего положения.....</b>	<b>131</b>
<b>7.4. Способ вспомогательных сфер.....</b>	<b>133</b>
7.4.1. Способ концентрических сфер.....	134
7.4.2. Способ эксцентрических сфер.....	136
<b>7.5. Взаимное пересечение поверхностей второго порядка. Особые случаи пересечения.....</b>	<b>138</b>

## **ГЛАВА 8**

### **РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

<b>8.1. Общие понятия о разворачивании поверхностей.....</b>	<b>143</b>
<b>8.2. Способы построения разверток.....</b>	<b>145</b>
8.2.1. Способ треугольников (триангуляции).....	145
8.2.2. Способ «нормального» сечения.....	151
8.2.3. Построение условных разверток не разворачивающихся поверхностей.....	155

## **ГЛАВА 9**

### **АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ**

<b>9.1. Общие сведения об аксонометрическом проецировании.....</b>	<b>159</b>
9.1.1. Основные понятия и определения.....	159
9.1.2. Показатели искажения по аксонометрическим осям. Виды аксонометрии.....	160

9.1.3. Основное предложение аксонометрии.....	161
<b>9.2. Ортогональная аксонометрическая проекция.....</b>	<b>163</b>
9.2.1. Основные свойства ортогональной аксонометрии..	163
9.2.2. Ортогональная аксонометрия окружности.....	165
<b>9.3. Стандартные аксонометрические проекции.....</b>	<b>166</b>
9.3.1. Ортогональная изометрия.....	167
9.3.2. Ортогональная диметрия.....	168
9.3.3. Косоугольная фронтальная диметрия.....	170
<b>9.4. Построение стандартных аксонометрических проекций.....</b>	<b>172</b>

## **ГЛАВА 10**

### **СВЕДЕНИЯ О КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ**

<b>10.1. Сведения о компьютерной графике.....</b>	<b>176</b>
10.1.1. Преимущества компьютерной графики перед традиционным способом выполнения чертежей...	176
10.1.2. Техническое обеспечение компьютерной графики.....	178
10.1.3. Программное обеспечение компьютерной графики.....	178
10.1.4. Компьютерная графика в ТГТУ.....	180

<b>СОДЕРЖАНИЕ.....</b>	<b>183</b>
------------------------	------------

<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>188</b>
-------------------------------	------------

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высшая школа, 1970. –240 с.: ил.
2. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983, - 240 с.: ил.
3. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 с.: ил.
4. Тарасов Б.Ф., Дудкина Л.А., Немолотов С.О. Начертательная геометрия. – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 256 с.: ил.
5. Демьянов В.П. Геометрия и «Марсельеза». – М.: Знание, 1979. – 234 с.
6. Егоров П.Е. Начертательная геометрия: Конспект лекций по курсу. – Тверь: ТГСХА, 1999. – 142 с.: ил.
7. Четверухин Н.Ф., Левицкий В.С., и др. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963.
8. Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф. Аксонометрия. – М.: ГИТТЛ, 1953.
9. Чекмарев А.А., Инженерная графика. – М.: Высшая школа, 2000. – 365 с.: ил.
10. Лагерь А.И., Колесникова Э.А. Инженерная графика. – М.: Высшая школа, 1985. – 176 с.: ил.
11. Забелин А.В. Начертательная геометрия: Краткий конспект лекций. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 102 с.: ил.